Math Analyse III   automne 2019

Feuille 5 : Suites, séries, et intégrales dépendant d'un paramètre

Suites

Exer. 5.1 Soit U une partie convexe dans $\mathbb{R}^m$, et soient $f_n : U \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) des fonctions qui sont convexes sur U. Prouver que si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f sur U, alors f est convexe (c-à-d, la convergence simple préserve la convexité).

Exer. 5.2 On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$ pour $x \in [0,1]$.

(a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

(b) Définir soigneusement ce que veut dire la phrase générique suivante :

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a,b]$.

(c) Est-ce que la convergence de la suite (f_n) ci-dessus vers f est uniforme sur $[0,1]$?

Exer. 5.3 (a) Donner la nature des suites suivantes pour $x \in \mathbb{R}$ fixé :

$$(1+\frac{x}{n})^n,\ n\sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

(b) Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et $[0,1]$.

Exer. 5.4 On pose $f_n(x) = \dfrac{nx}{ne^{x^2}+\cos x}$ pour $x \in [0,1]$.

(a) Trouver la fonction f qui est la limite simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

(b) Est-ce que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur $[0,1]$?

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ en citant le résultat du cours qui le permet.

Exer. 5.5 On considère les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) définies par $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Est-ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[-1,1]$?
3. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$. (Indication : montrer que f_n est positive sur $]0,1[$, et trouver où elle atteint son maximum.)
4. En vue de la partie (3), pourquoi peut-on dire, sans même le vérifier directement, que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f' sur $[0,1]$?
5. Soit $a \in]0,1[$. Prouver que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Séries

Exer. 5.6 Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les séries suivantes convergent-elles ?

(a) $\sum \frac{x^{n-1}}{n3^n}$ (b) $\sum \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (c) $\sum n!(x-1)^n$ (d) $\sum \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$

Exer. 5.7 Donner la nature des séries de fonctions suivantes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}, \ \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\cos(3^n x).$$

Préciser les intervalles sur lesquels la convergence est uniforme.

Exer. 5.8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$ dont les termes sont non nuls et satisfont

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0.$$

(a) Prouver que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge. On note $S(x)$ sa somme.

(b) Définir soigneusement ce que veut dire la phrase générique suivante :

La série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge normalement sur l'intervalle $[a,b]$.

(c) Prouver que la fonction S de la partie (a) est continue. (Indication : prouver la convergence normale sur chaque intervalle de la forme $[-r,r]$ (où $r > 0$), et invoquer un théorème du cours.)

(d) Prouver que la série $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ converge pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

(e) Prouver que $S(\cdot)$ est continûment dérivable, et que l'on a

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}.$$

(f) On considère maintenant le cas où $a_n = \frac{1}{n!}$. On observe alors que $S(0) = 1$. Déduire de la partie (e) que $S' = S$. Quelle est la notation usuelle pour la fonction $S(x)$ dans ce cas ?

Intégrales

Exer. 5.9 (a) On sait que l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^p}$ converge lorsque le paramètre p satisfait $p > 1$. En déduire la convergence des deux intégrales impropres suivantes :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^3}, \quad K = \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^3}\, dt.$$

(b) Invoquer un théorème du cours afin de prouver que la fonction I donnée par la règle

$$I(x) := \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^3+x^2}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. (Indication : convergence normale.)

(c) Prouver que la fonction $I(\cdot)$ est dérivable.

Exer. 5.10 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue. La *transformée de Laplace* de f veut dire la fonction F définie sur l'intervalle ouvert $U :=]0,\infty[$ comme suit :

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,dt\,, \quad x \in U\,.$$

(a) Prouver que la fonction F est bien définie et continue sur U.

(b) Prouver que F appartient à $C^1(U)$, et que $F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty -t\,e^{-xt} f(t)\,dt$
(c-à-d, on peut dériver sous le signe intégral).

Exer. 5.11 (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ est convergente.

On note $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

(b) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$h'(x) - h(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

(d) En utilisant la question précédente, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.