

Math Analyse III automne 2019
Feuille 2 : Topologie de \mathbb{R}^n et optimisation

Exer. 2.1 On décrit ci-dessous quelques ensembles dans \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , ou \mathbb{R}^3 .

(a) Pour chaque ensemble A ci-dessous, faire un dessin représentant la région concernée, et déterminer si A est : ouvert, fermé, borné, convexe, compact.

(b) Déterminer l'intérieur, l'adhérence, et la frontière de chaque ensemble.

Parties de \mathbb{R} :

$$[a, b] \text{ où } a \leq b, a, b \in \mathbb{R}; \quad [a, b[\text{ où } a < b, a, b \in \mathbb{R}; \quad \mathbb{N}; \quad \left\{ \frac{i-1}{i} : i \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Parties de \mathbb{R}^2 :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}; \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 1\}; \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| \geq 1\}$$

Parties de \mathbb{R}^3 :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 2\}; \quad \text{une partie finie de } \mathbb{R}^3; \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z < 0\}.$$

Exer. 2.2 Quelle est l'adhérence de l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels (dans la droite \mathbb{R}) ?

Exer. 2.3 Cet exercice concerne des ensembles A dans \mathbb{R}^2 .

(a) Trouver trois fermés différents A tels que

$$\text{int } A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) : (x-3)^2 + y^2 < 1\}.$$

(b) Montrer qu'un ensemble A satisfaisant les conditions de la partie (a) de l'exercice n'est pas convexe.

(c) Trouver trois ouverts différents A tels que $\text{fr } A = \{(x, y) : y = 0\}$. (On peut montrer qu'il y en a que trois.)

(d) Prouver qu'il n'existe aucun ouvert A dans \mathbb{R}^2 dont l'adhérence est une droite.

Exer. 2.4

(a) Soit $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur \mathbb{R}^n . Énoncer les conditions que doit satisfaire la fonction $x \mapsto N(x)$ afin de constituer une *norme* sur \mathbb{R}^n .

(b) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . Montrer que ses boules unité fermée et ouverte (relativement à la norme $\|\cdot\|$) sont convexes.

(c) Prouver que la fonction $(x, y) \mapsto \theta(x, y) := |y - x| + 2|x|$ est une norme sur \mathbb{R}^2 .

Exer. 2.5 Sachant que le point $(x, 4, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient au segment déterminé par les points $(-3, 3, 1)$ et $(0, 6, 2)$, trouver x et z .

Exer. 2.6 Prouver qu'exactement un des ensembles suivants dans \mathbb{R}^2 est convexe :

$$\{(x, y) : y \geq x^2, 0 \leq x \leq 1\}, \quad \{(x, y) : y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Exer. 2.7 (a) L'intérieur d'un ensemble dans \mathbb{R}^n peut-il consister d'un singleton ?

(b) Trouver un ensemble A dans \mathbb{R}^2 d'intérieur non vide dont la frontière consiste d'un singleton.

Exer. 2.8 Soit A un ensemble dans \mathbb{R}^n qui est à la fois ouvert et fermé.

(a) Prouver que A est soit l'ensemble vide, soit l'espace \mathbb{R}^n .

(b) En déduire que la frontière d'une partie non vide et bornée est toujours non vide.

Exer. 2.9 Déterminer le domaine naturel D de chacune des fonctions suivantes, et le classifier : ouvert, fermé, ni l'un ni l'autre, convexe, borné, compact.

$$(a) f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} \quad (b) f(x,y) = \left\{ \frac{1-x^2}{y^2-1} \right\}^{1/2} \quad (c) f(x,y,z) = \ln(xyz)$$

Exer. 2.10 Soient $\alpha, \beta > 0$. Déterminer, suivant les valeurs de α, β , si la fonction $f : (\mathbb{R}^{+*})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$ admet une limite en $(0,0)$.

Exer. 2.11 Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ est continue, mais que f n'est pas continue au point $(0,0)$ (on pourra pour cela restreindre f à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2\}$).

Exer. 2.12 Étudier la continuité sur \mathbb{R}^2 des fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

$$(a) f(x,y) = \begin{cases} \cos(x+y) & \text{si } x+y \geq 0 \\ \cosh(x+y) & \text{si } x+y < 0 \end{cases} \quad (b) g(x,y) = \begin{cases} x^2 y & \text{si } x < y \\ y & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

$$(c) f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases} \quad (d) f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \neq 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exer. 2.13 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en $(0,0)$ et qui s'annule en $(0,0)$. Utiliser un raisonnement par l'absurde afin de prouver l'existence d'un voisinage V de $(0,0)$ (par exemple, une boule centrée en $(0,0)$) tel que

$$|f(x,y)| \leq 1 \quad \forall (x,y) \in V.$$

Exer. 2.14 Soit C un ensemble compact dans \mathbb{R}^n et $f : C \rightarrow]0, +\infty[$ une fonction continue. Utiliser le théorème de Weierstrass afin de prouver l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$f(x) \geq \delta \quad \forall x \in C.$$

Exer. 2.15 Trouver l'infimum et le supremum de chacune des fonctions f, g, h sur le domaine A indiqué, et dans chaque cas déterminer si celui-ci est atteint (c-à-d, si un minimum/maximum existe) :

(a) $A = \mathbb{R}_+^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$; $f(x,y) = e^{x+y}$, $g(x,y) = e^{x-y}$, $h(x,y) = x^2 - y \sin x$

(b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$; $f(x,y) = x + 1/y$, $g(x,y) = x/y$, $h(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$

(c) $A = \text{int}(\mathbb{R}_+^2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$; $f(x,y) = \sqrt{xy}$, $g(x,y) = \sin(xy)$, $h(x,y) = \ln(xy)$

(d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$; $f(x,y) = x^3 y^2$, $g(x,y) = x \cos y$, $h(x,y) = y/(x+2)$

Exer. 2.16 Soit U un ouvert non vide dans \mathbb{R}^n , et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(a) Définir le sens de la phrase : f appartient à $C^1(U)$.

On prend $n = 2$, $U =$ la boule unité ouverte de \mathbb{R}^2 , et $f(x, y) = \sin(\pi x e^{xy}) + \ln(1 - x^2 - y^2)$.

(b) Calculer les dérivées partielles de f .

(c) Montrer que f appartient à $C^1(U)$.

Exer. 2.17 Prouver qu'il existe un voisinage ouvert V du point $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction $g(x, y) := \tan(e^{xy})$ soit continûment dérivable sur V (c-à-d, appartienne à $C^1(V)$). Peut-on affirmer que $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$?

Exer. 2.18 Trouver tous les points critiques des fonctions suivantes sur \mathbb{R}^2 :

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 3$

(b) $g(x, y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y - 7$

(c) $h(x, y) = 3x^2y + x^2 - 6x - 3y - 2$

Exer. 2.19 (a) Trouver les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4.$$

(b) Montrer que f n'admet ni un minimum ni un maximum global.

(c) Trouver le min et le max de la fonction $g(x) := x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

(d) Trouver le min et le max de la fonction f sur le pavé $A := [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Exer. 2.20 Soit $c > 0$ et soit f la fonction sur \mathbb{R}^2 définie par $f(x, y) := xy(x + y - c)$.

(a) Prouver que le problème de minimiser f sur le domaine fermé A constitué du triangle avec sommets $(0, 0)$, $(c, 0)$, $(0, c)$ et de son intérieur admet une solution.

(b) Identifier la solution.

Exer. 2.21 Trouver le minimum de la fonction $f(x, y) := 4x^2 + 2xy - 3y^2$ sur le pavé $0 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 0$.

Exer. 2.22 On cherche à identifier le point de la surface $z = xy - 1$ qui est le plus proche de l'origine.

(a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence d'un tel point ?

(b) Le trouver.

Exer. 2.23 Trouver les extrémums de la fonction $2xy + (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$ sur la boule unité fermée.

Exer. 2.24 Le résultat suivant (prouvé en cours) généralise le théorème de Weierstrass. Il est utile quand la compacité de l'ensemble sous-jacent fait défaut. Il porte sur la minimisation de f par rapport à l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, où $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée.

Théorème Supposons qu'il existe un point $\bar{x} \in A$ tel que l'ensemble $E := \{x \in A : f(x) \leq f(\bar{x})\}$ soit compact, et tel que f soit continue sur E . Alors f atteint un minimum sur A .

(a) À l'aide du théorème, prouver que la fonction $f(x, y) := \frac{12}{x} + \frac{18}{y} + xy$ atteint un minimum sur $\text{int } \mathbb{R}_+^2$, le premier quadrant ouvert de \mathbb{R}^2 ; c-à-d, la partie $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

(On observe que le théorème de Weierstrass ne s'applique pas à cet exemple : pourquoi ?)

(b) Trouver la solution du problème d'optimisation de la partie (a).

Exer. 2.25 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit A une partie dans \mathbb{R}^n .

(a) Montrer que $\inf_{x \in A} f = \inf_{x \in \text{adh} A} f$.

(b) Qu'en est-il de l'éventuelle égalité entre $\inf_{x \in A} f$ et $\inf_{x \in \text{int} A} f$?

Exer. 2.26

(a) Montrer que les fonctions

$$f(x, y) = 5xy, f(x, y) = e^x \sin y, f(x, y) = \arctan(y/x), f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

sont toutes solution de l'équation aux dérivées partielles (edp) de Laplace $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(b) Trouver une fonction h telle que $h_x = x + y$ et $h_y = x + 3$.

(c) Soit $f = x_1^3 x_2^5 x_3^7 x_4^{13}$. Trouver $\frac{\partial^6 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_1^2 \partial x_4 \partial x_2}$.

Exer. 2.27 On prend $f(x, y, z) = x^2 \cos(y^3 + z^2)$. Pourquoi sait-on que $f_{zyxxyxyy} = 0$, sans rien calculer ? Sait-on aussi que $f_{xyyzzzy} = 0$? (Expliquer)

Exer. 2.28 Une certaine fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ satisfait

$$f_x = 3x + ay^2, f_y = bxy + 2y, f_y(1, 1) = 3.$$

Trouver a et b . Trouver ensuite une fonction f qui satisfait les conditions données ; est-elle unique ?

Exer. 2.29 Y a-t-il une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $f_x = e^x \cos y$ et $f_y = e^x \sin y$?

Exer. 2.30 On suppose que $u = F(x, y, z)$ et $z = f(x, y)$, où les fonctions sont de classe C^2 . Trouver une formule qui exprime $\partial u / \partial x$ en fonction des dérivées partielles de F et f . De même pour $\partial^2 u / \partial x^2$.

Exer. 2.31

(a) Soit φ une fonction dans $C^2(\mathbb{R})$, et soit Ω un ouvert compris dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que la fonction $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad (x, y) \in \Omega.$$

(b) Soit f une fonction dans $C^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer que si $y \in C^2(\mathbb{R})$ est définie implicitement comme une fonction de x par l'équation $f(x, y) = 0$, où $f_y \neq 0 \forall (x, y)$, alors on a

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx}}{f_y^3}.$$

Géométrie différentielle

Exer. 2.32 On s'intéresse à la courbe de niveau \mathcal{C} suivante dans \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + xy + 2y^3 = 4\}.$$

- Trouver l'équation de la droite tangente à \mathcal{C} au point $(1, 1)$.
- Trouver l'équation de la droite qui est normale à \mathcal{C} au point $(1, 1)$.
- Prouver que \mathcal{C} n'admet aucun point où la droite tangente est verticale ou horizontale.

Exer. 2.33 Trouver l'équation du plan tangent, ainsi que de la droite normale, à la surface $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ au point $(1, 2, -1)$.

Exer. 2.34 Montrer que le point $(2, 1, 1)$ est commun aux deux surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0, \quad x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9,$$

et que les surfaces sont tangentes en ce point.

Exer. 2.35 Trouver le ou les points sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ qui sont le plus proche et le plus loin du point $(2, 1, 2)$, en montrant que ceux-ci existent.

Exer. 2.36 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) := 4y - x - z$. Trouver les extrémums de f sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Exer. 2.37 Montrer que la distance minimale entre les deux courbes $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2y = 16$ vaut $2\sqrt{3} - 1$. (Une indication graphique est donnée ci-dessous.)

Calcul différentiel du second ordre

Exer. 2.38 Soit D le demi-plan ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. On définit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy \ln x - 6y - x.$$

- Déterminer la direction de la normale à la courbe de niveau $f = -4$ au point $(1, 1)$.
- Calculer $f(1+h, 1+k)$ approximativement, à l'ordre 1, quand (h, k) est petit.
- Prouver que f admet un minimum local au point $(1, 3)$.
- Quelle est la valeur de $f(1+h, 3+k)$ quand une approximation comme celle de la partie (3) est faite ?
- Calculer le développement de Taylor d'ordre deux de f en $(1, 3)$. Quelle valeur approximative de $f(1+h, 3+k)$ fournit-il ?

Exer. 2.39 Trouver le développement limité d'ordre deux et autour de 0 de la fonction $x \mapsto e^x$. De même pour la fonction $u \mapsto \sin u$. Ensuite utiliser ces deux réponses afin de trouver le développements limité d'ordre deux à l'origine de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^x \sin(x+y)$. Comparer la réponse à celle obtenue par un calcul direct.

Exer. 2.40 Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 des fonctions suivantes aux voisinages des points donnés en justifiant qu'on y a droit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto x^y \quad ; \quad (x,y) \longmapsto x \ln y - y \ln x$$

en $(1,0)$ en $(1,1)$

Exer. 2.41 On a vu (Exer. 2.19) que la fonction $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$ n'admet ni un minimum ni un maximum global, et qu'elle possède quatre points critiques : $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$. Classifier ces points critiques.

Exer. 2.42 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Trouver et classifier ses points critiques.

Exer. 2.43 Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. En un certain point $P \in \mathbb{R}^2$, la matrice hessienne de f vaut

$$\begin{bmatrix} -7 & 19 \\ 19 & -59 \end{bmatrix}.$$

Autour de P , quelle est la position du graphe de la fonction par rapport à son plan tangent en P ?

Fonctions convexes

Exer. 2.44 (a) Prouver que les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{t^2}$ sont convexes sur \mathbb{R} . La convexité est-elle stricte ?

(b) Démontrer que la fonction $g(t) = e^{t^3}$ n'est pas convexe sur \mathbb{R} , mais qu'elle est convexe sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]0, \infty[$.

Exer. 2.45 Montrer que la fonction $x \mapsto 1/(1 + e^x)$ est convexe sur \mathbb{R}_+ . La fonction est-elle convexe sur \mathbb{R} ?

Exer. 2.46 Prouver que la fonction $(x,y) \mapsto xy$ n'est convexe sur aucune boule dans \mathbb{R}^2 , mais que les fonctions $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 + xy$ sont convexes sur \mathbb{R}^2 .

Exer. 2.47 Montrer que les trois fonctions suivantes sont séparément convexes en x (pour chaque y) et en y (pour chaque x) : $\exp(x+y)$, $\exp(xy)$, $\exp x + \exp y$.

Lesquelles sont des fonctions convexes sur \mathbb{R}^2 ? (Moralité : la convexité ne se vérifie pas une coordonnée à la fois.)

Exer. 2.48 Le DL d'ordre deux en $P = (1,2)$ d'une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ est donné par $1 + x + 2y + 3xy + 5y^2 + o((x-1)^2 + (y-2)^2)$.

(a) Écrire le DL en forme polynomiale canonique (c-à-d, en puissances de $x-1$ et $y-2$).

(b) Trouver $f(P)$, $\nabla f(P)$, et $\nabla^2 f(P)$, et écrire le DL en forme matricielle.

(c) La fonction f est-elle convexe autour du point P ?

Exer. 2.49 Est-ce que la fonction f de l'Exer. 2.38 est convexe sur son domaine D ?

Exer. 2.50 On sait que le DL d'ordre deux en $(0,0)$ d'une certaine fonction $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ est donné par $h(x,y) = 1 + x + 2y + xy + o(x^2 + y^2)$.

(a) Trouver le DL d'ordre deux en $(0,0)$ de $1/h$ (justifier son existence).

(b) Prouver que la fonction $1/h$ est convexe dans une boule autour de $(0,0)$, mais que ceci n'est pas le cas pour h .

Exer. 2.51 Soit $Q = (\mathbb{R}_+^*)^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ le premier quadrant ouvert, et soit $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{16}{xy} + 4x + 3y^2 - 2e^{1-y}$.

On s'intéresse au problème (P) de minimiser la fonction f sur l'ensemble Q .

1. Prouver que la fonction $\varphi(t) := 3t^2 - 2e^{1-t}$ est convexe sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Prouver que la fonction $g(x,y) := 1/(xy)$ est strictement convexe sur Q .
3. Dédire la convexité stricte de f sur Q à partir de (1) et (2).
4. Vérifier que le point $(2,1)$ est un point critique de f .
5. Expliquer comment la solution du problème (P) s'ensuit.

Exer. 2.52 Soit $M = [m_{ij}]$ une matrice $n \times n$ qui est symétrique. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) := (Mx) \cdot x = \langle x, Mx \rangle$. (Rappel : un point dans \mathbb{R}^n , lorsqu'il fréquente des matrices, est une colonne $n \times 1$.) Alors f est la *forme quadratique* associée à la matrice M .

(a) Montrer que $f(x) = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i x_j$ et prouver que $\nabla f(x) = 2Mx$.

(b) On sait que $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$; en déduire de la partie (a) que $\nabla \|x\|_2^2 = 2x$.

(c) Déterminer $\nabla^2 f(x)$.

(d) Prouver que f est convexe ssi $f(x) \geq 0 \forall x$.

(e) Prouver que f est strictement convexe lorsque M est définie positive.

Exer. 2.53 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction convexe. Prouver que f ne peut pas admettre exactement deux points critiques.