

**Feuille d'exercices n° 5**

TRIGONALISATION ET APPLICATIONS

**Exercice 1.** Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

**Exercice 2.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .

Trigonaliser  $A$ .

**Exercice 3.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .

Trigonaliser  $A$ .

**Exercice 4.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .

Trigonaliser  $A$ .

**Exercice 5.** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

**Exercice 6.** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$$

**Exercice 7.** Résoudre le système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$ .

**Exercice 8.** On considère les suites réelles  $(u_n)_{n \geq 0}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}.$$

1. On pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donner une matrice  $A$  telle que l'équation matricielle  $AX_n = X_{n+1}$  soit satisfaite pour tout  $n$ .
2. Diagonaliser  $A$ .
3. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n, u_0$  et  $u_1$ .

**Exercice 9.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ , soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$  et soit  $E_a$  l'espace vectoriel des suites réelles  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui satisfont à la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n.$$

1. Montrer que  $E_a$  est un sous-espace vectoriel de l'espace de suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  à valeurs réelles.
2. Montrer que  $A$  est trigonalisable sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si  $a \neq 1$ .
3. On suppose  $a \neq 1$ .
  - (a) Trouver une matrice inversible  $P$  telle que  $A = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale.
  - (b) Calculer  $A^n$ .
  - (c) En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n, u_0$  et  $u_1$ .
  - (d) Donner une base de  $E_a$ .
4. On considère maintenant le cas  $a = 1$ .
  - (a) Trouver une matrice inversible  $P$  telle que  $A = PTP^{-1}$  avec  $T$  triangulaire supérieure.
  - (b) Calculer  $T^2, T^3$  puis proposer une expression pour  $T^n$  qu'on prouvera par récurrence.
  - (c) En déduire une expression de  $u_n$  pour tout  $n$ .
  - (d) Donner une base de  $E_1$ .

**Exercice 10.** On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1$  et

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}.$$

1. Écrire la relation de récurrence de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  sous la forme d'une équation matricielle

$$X_{n+1} = AX_n.$$

2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3. Calculer  $u_n$  pour tout  $n$ .