**Université Claude Bernard Lyon 1** Semestre d'automne 2019-2020

Algèbre III - Licence de mathématiques générales et applications L2

---

**Feuille d'exercices n° 4**

ESPACES STABLES, VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES

---

# 1 Espaces supplémentaires, espaces stables

**Exercice 1.** Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyeau et le rang de $u$.
2. Déterminer deux espaces supplémentaires $F_1$, $F_2$ de $\mathbb{R}^4$, un de dimension 1 et un de dimension 3, qui sont stables par $u$.
3. Déterminer $u_{F_1}$ et $u_{F_2}$.
4. En déduire une forme diagonale pour $u$.

**Exercice 2.** On considère $\mathbb{R}^3$ avec sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$. Soit $u$ l'endomorphism de $\mathbb{R}^3$ donné par $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, $u(e_3) = e_1$.

1. Déterminer les sous-espaces stables pour $u$.
2. On déduire une description géométrique de $u$.
3. Donner une base dans laquelle $u$ est block diagonal. Quelle est la taille des blocks ?

**Exercice 3.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^3$ dans une base.

1. Trouver un sous-espace stable de dimension 1 pour $A$.
2. L'espace que vous avez trouvez dans 1., admet-il un sous espace supplémentaire qui est stable pour $A$ ?
3. En déduire qu'il n'existe pas de base dans laquelle la matrice de $u$ est block diagonal, avec un block $2 \times 2$.

**Exercice 4.** Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réelles d'une variable. Soit $u$ l'endomorphisme sur $\mathbb{R}[X]$ donné par $u(p)(x) = xp(x)$.

1. Montrer que $F = \{p \in \mathbb{R}[X] | p(1) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer un sous espace supplémentaire pour $F$. $F$ est-il stable par $u$ ?
2. Trouver des sous-espaces stables par $u$.
3. Y-a-t-il des sous espaces stables par $u$ de dimension finie ?
4. Les sous-espaces stables qui vous avez trouvés, admettent-ils un espace supplémentaire et stable pour $u$ ?

## 2 Valeurs propres et vecteurs propres

**Exercice 5.** Soit $\mathbb{K}$ un corps, par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\varphi_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire dont la matrice est $A$ dans la base canonique.

1. Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $\varphi_A$ si et seulement si $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_n) = 0$.
2. Soient $\varphi_A$ et $\varphi_B \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ les applications linéaires associées aux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de $\varphi_A$ et $\varphi_B$.

**Exercice 6.** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de $f$ ?
2. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale ? Si oui, donner une telle base.
3. Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

## 3 Polynôme caractéristique

**Exercice 7.** 1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier la formule suivante pour le polynôme caractéristique :
$$p_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A).$$

2. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que
$$A^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre complexe de $A$, alors le nombre complexe conjugué $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de $A$ avec la même multiplicité.
2. Montrer que si $v \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé à $\lambda$, alors son conjugué $\overline{v}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.

**Exercice 9.**

1. Donner un exemple d'une application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ n'ayant aucune valeur propre réelle. Cela est-il possible pour une application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ ?
2. Soit $V$ un espace vectoriel réel de dimension finie et soit $\varphi \in \mathscr{L}(V)$ n'ayant aucune valeur propre réelle. Que peut-on dire de la dimension de $V$ ? Montrer que si $\varphi \in \mathscr{L}(V)$ n'a aucune valeur propre réelle et $U$ est un sous-espace de $V$ stable par $\varphi$, alors la dimension de $U$ est paire.

**Exercice 10.** Soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres complexes. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la somme des valeurs propres de $A$ ?
2. Quel est le produit des valeurs propres de $A$ ?
3. Montrer que si son déterminant n'est pas nul, $A$ est diagonalisable.
4. Montrer que si son déterminant est nul, $A$ n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que $A$ est diagonalisable sauf si son rang est égal à 1.
6. On suppose que la matrice $A$ est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

# 4 Diagonalisation

**Exercice 11.** Soit $\varphi$ et $\psi$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si chacun de ces endomorphismes est diagonalisable. Si oui, trouver une base formée de vecteurs propres et la matrice correspondante dans cette base en donnant la matrice de passage.

**Exercice 12.** Diagonaliser dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13.** Discuter en fonction de $a$, $b$ et $c$ la possibilité de diagonaliser les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

**Exercice 14.**

1. Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Écrire une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} \alpha & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \alpha & c_{23} & & c_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

**Exercice 15.** Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
En diagonalisant $A$, trouver une solution $Z$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $Z^2 = A$.

**Exercice 16.** Soit $V = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles $2 \times 2$ et soit $u$ l'endomorphisme de $V$ défini par
$$u\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'endomorphisme $u$ est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de $u$.
2. Quel est le polynôme caractéristique de $u$ ?

**Exercice 17.** On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel form ? des polynômes de degré inférieur ou égal ? $n$. Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par
$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

1. Écrire la matrice de $u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $u$ est diagonalisable.
3. Résoudre l'équation $u(P) = P$.

**Exercice 18.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$ de rang égal à 1.

1. Montrer que la trace de $u$ est une valeur propre de $u$.
2. En déduire que $u$ est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.