Feuille d'exercices n° 1

Révisions d'algèbre linéaire

1 Espaces vectoriels – Bases

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E.

1. On pose $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2 + e_3$ et $f_3 = e_3 + e_1$. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.
2. On pose $g_1 = e_1 + e_2$, $g_2 = e_2 + e_3$, $g_3 = e_3 + e_4$ et $g_4 = e_4 + e_1$. Montrer que la famille (g_1, g_2, g_3, g_4) n'est pas libre.
3. On pose $h_1 = e_1 + e_2$, $h_2 = e_2 + e_3$, $\ldots$, $h_{n-1} = e_{n-1} + e_n$ et $h_n = e_n + e_1$. La famille de vecteurs $(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, h_n)$ est-elle libre ?

Exercice 2. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^5$: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
2. Soit $v \in \mathbb{R}^5$. À quelle condition $v \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$?
3. Trouver un supplémentaire de $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 3.

1. Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$, alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$ et $y = (1, 1, 0, -1)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $G = \mathrm{Vect}(x, y)$. Quelles sont les dimensions de $F, G, F + G$ et $F \cap G$?

2 Applications linéaires – Théorème du rang

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application u :

$$\begin{aligned} u :\ \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z) \end{aligned}$$

1. Montrer que u est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si la dimension de E est paire.

3 Matrices – Changements de base

Exercice 6. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -16 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $E = \{x \in \mathbb{R}^3 | \ u(x) = 2x\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = -2x\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, en donner une base et leurs dimensions.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
3. Soit e_1 un vecteur directeur de E et (e_2, e_3) une base de F. Calculer la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3).

Exercice 7.

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées. Montrer que AB et BA ont la même trace.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que toutes les matrices de u ont la même trace.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Montrer que pour tout entier naturel k, les matrices A^k et B^k ont la même trace.

Exercice 8. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $\varepsilon_1 = (1; 1; 1)$, $\varepsilon_2 = (1; -1; 0)$, $\varepsilon_3 = (1; 0; 1)$ et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice M de u dans cette base. Quelle relation lie A et M ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$ et de $\operatorname{Im}(u)$.

4 Inversibilité

Exercice 9. Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et expliciter son inverse.