Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2018-2019**

L3 - Mathématiques générales et applications UE : Topologie et équations différentielles

---

Feuille d'exercices n° 8

Exercice 1. *Espèces en compétition*

On considère le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t)\big(1-x(t)-2y(t)\big), \\ y'(t) & = & 2y(t)\big(1-2x(t)-y(t)\big), \end{array}\right. \quad t\in\mathbf{R}. \tag{1}$$

Déterminer les points d'équilibre du système (1) et étudier leur stabilité.

Exercice 2. *Pendule simple et pendule amorti*

L'équation du pendule simple est

$$x''(t)+\sin\big(x(t)\big)=0,\ \ t\in\mathbf{R} \tag{2}$$

et celle du pendule amorti

$$x''(t)+kx'(t)+\sin\big(x(t)\big)=0,\ \ t\in\mathbf{R} \tag{3}$$

où $k>0$.

On réécrit ces équations du second ordre sous la forme de systèmes de deux équations du premier ordre :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t)=v(t) \\ v'(t)=-\sin\big(x(t)\big) \end{array}\right. \tag{4}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t)=v(t) \\ v'(t)=-kv(t)-\sin\big(x(t)\big) \end{array}\right. \tag{5}$$

avec les conditions initiales $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$, où x_0 et v_0 sont deux réels donnés.

On souhaite étudier le comportement des solutions de ces deux systèmes.

1. *Cas du pendule simple.*

   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution globale (définie sur $\mathbf{R}$ tout entier) au système (4) pour toute donnée initiale (x_0,v_0).

   (b) Déterminer les points d'équilibre de (4).

   (c) Soit (x^*,v^*) un équilibre. Peut-on conclure quant à la stabilité de cet équilibre en étudiant le système linéarisé en ce point ?

   (d) On note pour tout $(x,v)\in\mathbf{R}^2$, $H(x,v)=\dfrac{1}{2}v^2+1-\cos x$.
   Montrer que si $t\mapsto(x(t),v(t))$ est solution de (4), $t\mapsto H(x(t),v(t))$ est constante. Autrement dit, H est une intégrale première pour (4).

   (e) Tracer le portrait de phase du pendule simple. *On pourra étudier les ensembles de niveau de H : $\mathcal{E}_a=\{(x,v)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,H(x,v)=a\}$ pour $a\in\boldsymbol{R}$.*

   (f) Décrire le comportement des solutions de (4) en fonction de la valeur initiale de l'hamiltonien $H(x_0,v_0)$.

2. *Cas du pendule amorti.*

   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution globale (définie sur $\mathbf{R}$ tout entier) au système (5) pour toute donnée initiale (x_0, v_0).

   (b) Montrer que si $t \mapsto (x(t), v(t))$ est solution de (5), alors $t \mapsto H(x(t), v(t))$ est décroissante.

   (c) Montrer que l'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable pour (5), *i.e.* pour des données initiales (x_0, v_0) dans un voisinage de $(0, 0)$, les solutions associées $(x(t), v(t))$ convergent vers $(0, 0)$ quand $t \to +\infty$.

   (d) Montrer que le système (5) n'admet pas de solutions périodiques non constantes.