
Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1. Établir si les parties suivantes de $\mathbf{R}$ sont complètes ou non : $[0,1]$, $]0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$.

Exercice 2. Soit X un ensemble et $f : X \to \mathbf{R}$ une application injective. On définit pour tout $x, y \in X$,

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)|.$$

1. Montrer que d définit une distance sur X.
2. Supposons que (X,d) est complet. Montrer que $f(X)$ est alors fermé dans $\mathbf{R}$.
3. Supposons réciproquement que $f(X)$ est fermé dans $\mathbf{R}$. Montrer que (X,d) est complet.

Exercice 3.

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire continue de E dans E telle que $|||T||| < 1$.
   (a) Montrer que la série $\sum T^k$ converge dans $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Montrer que $I - T$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$, et que $(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.
2. Soit un entier $n \geq 2$. On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices réelles de taille $n \times n$ muni de la norme matricielle $|||\cdot|||$ subordonnée à la norme euclidienne.
   (a) Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (b) Pour $A \in GL_n(\mathbf{R})$, montrer que
   $$B\left(A, \frac{1}{|||A^{-1}|||}\right) \subset GL_n(\mathbf{R}).$$

Exercice 4. *Autour de la complétude d'espaces de fonctions continues.*

1. Rappeler le théorème du cours qui permet de vérifier que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite de fonctions définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$.
   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction racine carrée sur $[0,1]$. Que peut-on en déduire sur $(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$?
3. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$, on pose $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ et que muni de cette norme, $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ est complet.
4. Montrer que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.
   Indication : utiliser la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \inf(n, \frac{1}{\sqrt{x}})$.

Exercice 5. *Autour de la complétude d'espaces de suites.*
Dans cet exercice, il est commode de noter une suite réelle $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sous la forme $(x(n))_{n\in\mathbf{N}}$. On considère l'espace vectoriel $\ell^1 = \left\{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| < \infty\right\}$, l'espace vectoriel $Conv$ des suites réelles convergentes et ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées.

1. Montrer que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Montrer ℓ^1 est inclus dans ℓ^∞.
3. Montrer que $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.
4. Montrer que $(Conv, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Exercice 6. On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme euclidienne. Soit $A = B(0,1)$ la boule unité ouverte, et A^c son complémentaire.
On considère deux distances sur A : la distance d_1 induite par la norme euclidienne et la distance d_2 définie par : pour tout $(x,y) \in A^2$, $d_2(x,y) = \|x-y\|_2 + \left|\frac{1}{d_1(x,A^c)} - \frac{1}{d_1(y,A^c)}\right|$.

1. Vérifier que d_2 est une distance.
2. Montrer que $\mathrm{id}\colon (A,d_1) \to (A,d_2)$ est un homéomorphisme.
3. Montrer que (A,d_1) n'est pas complet.
4. Montrer que (A,d_2) est complet.
5. Que peut-on en conclure ?

Exercice 7. *Théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert.*
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On considère la norme associée $\|\cdot\|$. Pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace complet. On dit que E est un *espace de Hilbert*.

1. Montrer l'identité du parallélogramme : pour tout $x, y \in E$,
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
2. Soit C une partie convexe non vide et fermée de E. Soit $x \in E$.
   (a) Montrer qu'il existe $c \in C$ tel que $\|x-c\| = \inf_{y\in C} \|x-y\|$.
   On considérera une suite minimisante et on montrera qu'elle est de Cauchy.
   (b) Montrer qu'un tel $c \in C$ est unique. On note $P_C(x)$ ce point.
   (c) Montrer que $P_C(x)$ est caractérisé par
   $$\forall y \in C,\ \langle y - P_C(x), x - P_C(x)\rangle \leq 0.$$
   Interpréter géométriquement cette inégalité.

Exercice 8. Soit (X,d) un espace métrique complet, $f\colon X \to X$ et $k \in \mathbf{N}^*$.
On suppose que $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (k fois) est contractante. Montrer que f a exactement un point fixe.

Exercice 9. On note E l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ muni de la norme uniforme : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
Soit $K \in \mathcal{C}([0,1]^2,\mathbf{R})$, on note $\|K\|_\infty = \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |K(x,y)|$.
Pour tout $f \in E$, on pose

$$\forall x \in [0,1],\ Tf(x) = \int_0^x K(x,y)f(y)\,dy.$$

On admet que $Tf \in E$. On a ainsi défini une application linéaire $T : E \to E$.

1. Montrer que T est continue.
2. Montrer que, pour $k \geq 1$, on a $|||T^k||| \leq \dfrac{\|K\|_\infty^k}{k!}$.

   Indication : commencer par montrer que pour tout $k \geq 1$, tout $x \in [0,1]$, $|T^k(x)| \leq \dfrac{\|K\|_\infty^k\, x^k}{k!}\|f\|_\infty$.
3. En déduire que la série $\sum T^k$ converge dans E. Déterminer sa limite.
4. Montrer que, pour tout $g \in E$ l'équation $Tf = f + g$ a exactement une solution.

Exercice 10. Pour $x_0 \in \mathbf{R}$, on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n.$$

On veut montrer le résultat suivant : *il existe un unique choix de $x_0 \in \boldsymbol{R}$ tel que pour tout $n \in \boldsymbol{N}$,* $x_n \in [10,11]$.

1. Montrer que $Y = \{\, (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty \colon \forall n \in \mathbf{N},\ y_n \in [10,11]\,\}$, muni de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$ est complet.
2. Pour tout $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in Y$, on définit la suite $F(y)$ par :

   $$\forall n \in \mathbf{N},\ \big(F(y)\big)_n = \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n}.$$

   Montrer que $F\colon Y \to Y$ est bien définie et contractante.
3. Conclure.

Exercice 11. Soit (E,d) un espace métrique. On rappelle que $d' = \min(1,d)$ est une distance sur E topologiquement équivalente à d. Vérifier que (E,d) est complet si et seulement si (E,d') l'est également.

Exercice 12. Soit une famille d'espaces métriques complets $((X_n,d_n))_{n\in\mathbf{N}}$. Quitte à remplacer d_n par $\min(1,d_n)$, on peut supposer que chacune des distances d_n est majorée par 1 (exercice précédent).
On munit l'espace produit $X = \prod_{n\in\mathbf{N}} X_n$ de la distance δ définie de la manière suivante :

$$\text{pour tout } u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X,\ v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X,\ \delta(u,v) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{d_n(u_n,v_n)}{2^n}.$$

Montrer que (X,δ) est complet.