Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1. Soit X un ensemble muni de la distance discrète d. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (X,d) soit compact.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E.

1. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A+B$ est compact.
2. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A+B$ est fermé.
3. Montrer que si A et B sont fermés, cela n'implique pas que $A+B$ soit fermé.

Exercice 3. Soit (X,d) un espace métrique. Soit $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille décroissante de compacts de X. On note $K = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$. Soit U un ouvert de X tel que $K \subset U$.
Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $K_n \subset U$.

Exercice 4. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts dans $\mathbf{R}^2$ muni de la topologie usuelle :

— $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^4 \leq \cos(xy)\}$,
— $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 < xy \leq x^2 \leq 1\}$,
— $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 \leq xy \leq x^2 \leq 1\}$.

Exercice 5. On munit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$: pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Les sous-ensembles suivants sont-ils compacts dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

1. $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$;
2. $B_f(0,1) = \{f \in E : \|f\|_\infty \leq 1\}$.

Exercice 6. Soit un entier $n \geq 2$ et l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices réelles de taille $n \times n$ ($\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension n^2). On note $|||\cdot|||$ la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$, c'est-à-dire, pour $M \in M_n(\mathbf{R})$,

$$|||M||| = \sup_{X\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2}.$$

On considère l'ensemble des matrices orthogonales $O(n) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \colon {}^tAA = I_n\}$.

1. Soit $A \in O(n)$. Déterminer $|||A|||$.
2. Montrer que $O(n)$ est compact.
3. Étudier la compacité de l'ensemble $GL_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 7. Soit (X,d) un espace métrique, K un compact et F un fermé de X tels que $F \cap K = \emptyset$. Soit $d(K,F) = \inf\{d(x,y) : x \in K, y \in F\}$.

1. Montrer que $d(K,F) > 0$.
2. Montrer que si l'on suppose de plus que F est compact, alors il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $d(x,y) = d(K,F)$.

Exercice 8.

1. Soit $f\colon \mathbf{R}^n \to [0,+\infty[$ une fonction continue telle que $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f admet un minimum.
2. Soit $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $g(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (a) Montrer que g est bornée.
   (b) La fonction g atteint-elle nécessairement ses deux bornes ?
   (c) Montrer que g atteint au moins l'une de ses bornes.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de montrer le théorème d'Alembert Gauss : tout polynôme non-constant à coefficients complexes admet une racine complexe.
Soit P un polynôme non-constant à coefficients complexes.

1. Montrer que la fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R},\ z \mapsto |P(z)|$ admet un minimum global. On note $z_0 \in \mathbf{C}$ un point tel que $|P(z_0)| = \min_{z\in\mathbf{C}} |P(z)|$.
2. Supposons que $P(z_0) \neq 0$. On définit $Q : \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ z \mapsto \frac{P(z_0+z)}{P(z_0)}$.
   (a) Montrer qu'il existe $p, n \in \mathbf{N}^*$ deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$, et $b_p, \ldots, b_n \in \mathbf{C}$ tels que $Q(z) = 1 + \displaystyle\sum_{k=p}^{n} b_k z^k$ et $b_p \neq 0$.
   (b) Soit $r > 0$ et $\varphi \in \mathbf{R}$ tels que $b_p = re^{i\varphi}$. Pour tout $\rho > 0$, on note $z_\rho = \rho e^{i(\pi-\varphi)/p}$. Vérifier que si ρ est suffisamment petit, alors $|Q(z_\rho)| < 1$.
3. Conclure.

Exercice 10. *Un théorème de point fixe*
Soit (K,d) un espace métrique compact et $f : K \to K$ une fonction telle que :

$$\text{pour tout } x \in K,\ \text{tout } y \in K \text{ tels que } x \neq y,\ d(f(x),f(y)) < d(x,y).$$

1. Montrer que f a au plus un point fixe.
2. Montrer qu'il existe un élément $a \in K$ tel que $d(a,f(a)) \leq d(x,f(x))$ pour tout $x \in K$.
3. Montrer que a est le point fixe de f.
4. Soit $x_0 \in X$, on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $(d(x_n,a))_{n\geq 0}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$.
5. Montrer que $\ell = 0$.
6. Énoncer le résultat démontré dans cet exercice.

Exercice 11. *Théorème de Dini*
Soit (K, d) un espace métrique compact et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de fonctions réelles continues sur K telles que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une fonction continue f. Quitte à remplacer f_n par $f_n - f$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut supposer que f est la fonction identiquement nulle sur K.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $f_n(x_n) = \max_{x\in K} f_n(x)$.
2. Montrer que la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. Démontrer que $f_n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur K.

Exercice 12. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties convexes de E.

1. Montrer que le plus petit ensemble convexe contenant à la fois A et B est
$$C = \{(1-\lambda)a + \lambda b\colon a \in A, b \in B, \lambda \in [0,1]\}.$$
2. Montrer que si A et B sont compacts alors C est compact.

Exercice 13. Soit $n, m \in \mathbf{N}^*$. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une fonction continue.

1. On suppose que $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$. Montrer que pour tout compact K de $\mathbf{R}^m$, $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbf{R}^n$.
2. Énoncer et montrer la réciproque de ce résultat.

Exercice 14.

1. En utilisant la fonction arctan, montrer que $\mathbf{R}$ est homéomorphe à l'intervalle $]-1, 1[$.
2. En déduire que l'on peut rendre $\mathbf{R}$ compact en ajoutant deux points $-\infty$ et $+\infty$.
3. Montrer que $\mathbf{R}$ est homéomorphe au cercle unité de $\mathbf{R}^2$ privé du point $(-1, 0)$.
4. En déduire que l'on peut rendre $\mathbf{R}$ compact en lui ajoutant un seul point.

Exercice 15. Soit (K, d) un espace métrique compact, soit $f : K \to K$ telle que :
$$\text{pour tout } x, y \in K,\ d(f(x), f(y)) \geq d(x, y).$$
Le but de l'exercice est de montrer que f est une isométrie bijective.

1. Montrer que f est injective.
2. Soit $x \in K$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge et telle que $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N},\ n \mapsto \varphi(n+1) - \varphi(n)$ strictement croissante.
   (b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} x_{\psi(n)} = x$.
3. Montrer que $f(K)$ est dense dans K.
4. Montrer que pour tout $x, y \in K$, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.
5. Montrer que f est surjective.