
Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Pour toute suite réelle $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on note $A(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

1. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \emptyset$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a\}$.
3. Soit a_0 et a_1 deux réels. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a_0, a_1\}$.
4. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et $a_0, \dots, a_p$ des réels. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a_0, \dots, a_p\}$.
5. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \mathbf{N}$.
6. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \mathbf{R}$.

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. On note χ_A la fonction caractéristique de A définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$. On suppose que $\mathbf{R}$ est muni de la distance usuelle.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que χ_A soit continue.
2. Déterminer l'ensemble des points où χ_A est continue.
3. Que peut-on dire de $\chi_{\mathbf{Q}}$?

Exercice 3. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \to Y$. Montrer que f est continue sur X si et seulement si pour toute partie A de X, on a $f\big(\overline{A}\big) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 4. Pour chacun des énoncés suivants, déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui le satisfont :

1. $\exists\delta > 0\ \forall\varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbf{R}\ \forall x' \in \mathbf{R}\ |x - x'[< \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
2. $\forall\varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbf{R}\ \forall x' \in \mathbf{R}\ \exists\delta > 0\ |x - x'[< \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Exercice 5. Dans cet exercice, on munit $\mathbf{R}$ (ainsi que ses intervalles) de la distance usuelle. Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ? lipschitziennes ?

$$f : \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto x^2, \end{array} \qquad g : \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x}, \end{array} \qquad h : \begin{array}{ll} [1,+\infty] & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x}. \end{array}$$

Exercice 6. On munit $]0, +\infty[$ de la distance usuelle et, pour tout entier $n \geq 0$, on note f_n la fonction

$$f_n :]0, +\infty[\ \to]0, +\infty[\qquad x \mapsto \frac{x}{n + x}.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \to [0,1]$ une application. Dans cet exercice l'intervalle $[0,1]$ est muni de la distance usuelle.
Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction

$$\begin{aligned} f_n : X &\to [0,1] \\ x &\mapsto \inf_{y \in X} (f(y) + nd(x,y)). \end{aligned}$$

0. Remarquer que pour tout $n \geq 0$, on a $f_n \leq f$.
1. Montrer que pour chaque $n \geq 0$, la fonction f_n est n-lipschitzienne.
2. Montrer que si f est continue en a alors la suite $(f_n(a))_{n \geq 0}$ converge vers $f(a)$.
   Indication : vérifier que
   $$\forall r > 0, \quad \forall n \geq 1/r, \quad f_n(a) \geq \inf_{y \in B(a,r)} f(y).$$
3. Montrer que si f est uniformément continue alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f.
4. En déduire que la fonction racine carrée de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est limite uniforme de fonctions lipschitziennes.

Exercice 8. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} : f \text{ continue}\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to \mathbf{R} \\ f &\mapsto f(0). \end{aligned}$$

Montrer que φ est linéaire mais pas continue. Qu'en est-il si on munit E de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 9. Soit E l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$. On considère l'application $\mu : E \to E$ définie par

$$\mu(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ pour } f \in E \text{ et } x \in [0,1].$$

1. Montrer que μ est bien définie que que μ est une application linéaire continue.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par
   $$f_n(t) = n(1-t)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } t \in [0,1].$$
   Pour chaque $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.
3. En déduire la norme de μ.

Exercice 10. On considère $\ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Rappelons que pour une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$, la norme de u vaut $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|$.
Soit φ l'application de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ vers lui même qui à toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$ associe la suite

$$\varphi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbf{N}}.$$

1. Montrer que φ est une application linéaire continue.
2. Déterminer la norme de φ.