
Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbf{R}$. Montrer les égalités et l'inégalité suivantes :

1. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
2. si $A \cap B \neq \emptyset$, $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$,
3. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
   On rappelle que $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x - y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes.

Exercice 4. Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbf{R}[X]$.
2. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 5. On définit, pour $j = 1, \ldots, 4$, l'application $d_j : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= (x - y)^2, \qquad & d_3(x, y) &= |x - 2y|, \\ d_2(x, y) &= \sqrt{|x - y|}, \qquad & d_4(x, y) &= |x^2 - y^2|. \end{aligned}$$

Parmi ces applications, la(les)quelle(s) défini(ssen)t une distance sur $\mathbf{R}$?

Exercice 6.

1. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $\phi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une application croissante s'annulant uniquement en 0 et sous-additive, *i.e.* : pour tout $(u, v) \in (\mathbf{R}^+)^2$, $\phi(u + v) \leq \phi(u) + \phi(v)$. Montrer que $\delta = \phi \circ d$ est une distance sur X.
2. Montrer que la fonction $\phi : u \mapsto \dfrac{u}{1 + u}$ satisfait les hypothèses de la question précédente.
3. Montrer que $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ est une distance sur $\mathbf{R}$, qui définit la même topologie que la distance usuelle associée à la valeur absolue, mais que ces deux distances ne sont pas Lipschitz-équivalentes.

Exercice 7.

1. Soit (X, d) un espace métrique, $r > 0$. Montrer que le diamètre de toute boule de rayon r dans X (ouverte ou fermée) est inférieur ou égal à $2r$.
2. Soit X un ensemble muni de la distance discrète. Quel est le diamètre de $B(x, \frac{1}{2})$ pour $x \in X$?
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$. Calculer le diamètre des boules (fermées et ouvertes) de E en fonction de leur rayon.

Exercice 8. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} : f \text{ continue}\}$.

1. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
   Pour $f \in E$ et $r > 0$, représenter graphiquement $B(f, r)$.
2. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
3. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$. Montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
4. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0,1], f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
5. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes sur E ?

Exercice 9. Dans cet exercice, on munit $\mathbf{R}^2$ de la norme euclidienne.

1. Les parties suivantes de $\mathbf{R}^2$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

   a) $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ *b)* $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ *c)* $\{(x, x^2) : x \in \mathbf{R}\}$ *d)* $\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbf{N}^*\right\}$

2. On note $A = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0\right\}$. Montrer que A est une partie de $\mathbf{R}^2$ qui n'est ni ouverte ni fermée. Déterminer son intérieur et son adhérence.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit A un ouvert de X et B une partie quelconque de X. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
   En utilisant des intervalles de $\mathbf{R}$, montrer que cette inclusion peut ne pas être vraie si A n'est pas ouvert.
2. Dans $\mathbf{R}$, donner des exemples d'ouverts A et B tels que les ensembles $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$ soient tous différents.

Exercice 11.

1. Soit (X, d) un espace métrique, U un ouvert de X. Montrer l'inclusion $U \subset \mathring{\overline{U}}$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. On considère $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.
   (a) Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $[0,1] \cap \mathbf{Q}$.
   (b) Construire une partie A de $\mathbf{R}$ telle que les ensembles suivants soient deux à deux distincts : A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$.

Exercice 12. *Topologie induite*

Soit $X = \{x \in \mathbf{R} : \sin x > 0\}$, muni de la distance induite $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$, $(x, y) \mapsto |x - y|$. On note $A =]0, \pi[$.

1. Étudier si A est un ouvert de (X, d).
2. Étudier si A est un fermé de (X, d).

Exercice 13. On considère $X = \ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Dans cet exercice, il est commode de noter une suite réelle x de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x : \mathbf{N} &\to \mathbf{R} \\ n &\mapsto x(n). \end{aligned}$$

On munit X de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x(n)|$. On note $Y = \{x \in \mathbf{R}^\mathbf{N} : \lim_{n\to+\infty} x(n) = 0\}$.

1. Montrer que $Y \subset X$.
2. Montrer que Y est fermé dans $(X, \|\cdot\|_\infty)$.
3. On note Z l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que Z est dense dans Y mais que Z n'est pas dense dans X.

Exercice 14. Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie A de X, on définit la distance à A par

$$d(\cdot, A) : X \to \mathbf{R},\ x \mapsto d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

1. Montrer que pour toute partie A de X, l'application $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne, *i.e.* pour tout $x \in X$, $y \in X$, on a
$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$
2. Soit A une partie de X, $x \in X$. Montrer que x appartient à $\overline{A}$ si et seulement si on a $d(x, A) = 0$.
3. Soit A et B deux parties de X. Montrer que l'ensemble $U = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.
4. En déduire que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X, alors il existe deux parties U et V ouvertes et disjointes de X telles que $A \subset U$ et $B \subset V$.
5. *Lemme d'Urysohn.* Montrer que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X, alors il existe une application $f : X \to \mathbf{R}$ continue telle que
   (i) pour tout $x \in A$, $f(x) = 0$,
   (ii) pour tout $x \in B$, $f(x) = 1$,
   (iii) pour tout $x \in X$, $0 \leq f(x) \leq 1$.
   Indication : considérer f définie par $f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$.

Exercice 15. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que tout ouvert de X peut s'écrire comme une réunion dénombrable de fermés de X.

Exercice 16. Soit (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques.

1. Soit $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ deux applications continues.
   (a) Montrer que $\Delta = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X.
   (b) Soit A une partie de X. Montrer que si A est dense dans X et si pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$ alors pour tout $x \in X$, $f(x) = g(x)$.
2. (a) Montrer que si $f : X \to Y$ est une application continue alors son graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est un fermé de $X \times Y$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?