

## Fiche 7 - Suites et séries numériques

**Exercice 1.** Déterminer si les suites suivantes sont convergentes ou non. Dans le cas où elles convergent donnez la limite :

$$(1) u_n = \frac{(-1)^n}{3^n} \quad (2) u_n = \frac{n^2}{e^n} \quad (3) u_n = \frac{\sin n}{n^2} \quad (4) u_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

$$(5) u_n = n\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (6) u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad a, b \text{ strictement positifs.}$$

**Exercice 2.** À l'aide du critère de d'Alembert ou du critère de Cauchy, déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$(1) u_n = \frac{n!}{n^n} \quad (2) u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n \quad (3) u_n = \frac{2^n}{n!} \quad (4) u_n = \left(\pi + \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Exercice 3.** Déterminer la nature (convergence absolue, convergence, semi-convergence, divergence et divergence grossière) des séries  $\sum u_n$  de termes généraux :

$$(1) u_n = q^n \text{ où } q > 0, \quad (2) u_n = n^{\alpha+1} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3) u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

$$(4) u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) \quad (5) u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}, \quad (6) u_n = \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2},$$

$$(7) u_n = \int_0^{1/n^2} \sin(t) dt, \quad (8) u_n = e^n - 1 - \frac{1}{n}.$$

**Exercice 4.** Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (n-1)}$$

est-elle convergente ? Calculer sa somme lorsque  $\alpha = 1$ .

## Exercices supplémentaires

**Exercice 5.** Étudier les suites  $(u_n)_n$  dont le terme général est donné par

$$(1) u_n = \frac{1}{2^n} \quad (2) u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (3) u_n = n^{1/n} \quad (4) u_n = \frac{2^n}{n^2}$$

$$(5) u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \quad (6) u_n = n \sin \frac{2}{n} \quad (7) u_n = \sqrt[n]{n+1} \quad (8) u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Exercice 6.** Considérons les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$$

1. Montrer que  $(u_n)_n$  est strictement croissante et que  $(v_n)_n$  est strictement décroissante.
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n < v_n$ .
3. Montrer que  $(u_n)_n$  est convergente vers  $e$ .
4. Montrer que  $(v_n)_n$  converge vers  $e$ .
5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! \theta_n, 0 < \theta_n < 1 \text{ et } e = u_n + \frac{\theta_n}{n(n!)}$$

6. Donner une valeur approchée par défaut de  $e$  à  $10^{-4}$  près.
7. Montrer que  $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ .

**Exercice 7.** Etudier la nature des séries  $\sum u_n$  de de termes généraux :

$$(1) u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad (2) u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, \quad (3) u_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), \quad (4) u_n = \frac{1}{3^n \ln n},$$

$$(5) u_n = \frac{\ln n}{n}, \quad (6) u_n = \frac{\ln n}{2^n n}, \quad (7) u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}, \quad (8) u_n = (1 + \sqrt{n})^{-n},$$

$$(9) u_n = \frac{1}{4^n \ln(2 + \frac{1}{n})}, \quad (10) u_n = \frac{1}{4^n \ln(1 + \frac{1}{n})}$$

**Exercice 8.** Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la série

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-4)^\alpha}$$

est-elle convergente ? Calculer sa somme lorsque  $\alpha = 1$ .

**Exercice 9.** Étudier la convergence de la série numérique de terme général donné pour tout  $n \geq 1$  par

$$u_n = \frac{\sqrt{n} + \sin(n)}{\ln(n+1) + n^3}$$

**Exercice 10.** Montrer que la série numérique suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$$

**Exercice 11.** Calculer une valeur approchée à  $10^{-2}$  de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ .

**Exercice 12.** Soit  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. On considère la série numérique  $\sum_{n \geq 0} u_n$  de terme général  $u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n f(x) dx$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1 + x}.$$

2. On note  $(S_n)_{n \geq 0}$  la suite des sommes partielles,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Montrer que

$$S_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} f(x) dx.$$

3. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente et que sa somme vaut  $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx$ .

4. Montrer, en choisissant judicieusement  $f$ , que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ .

**Exercice 13.** On considère  $\mathbb{R}_2[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 2. On pose  $P_0(X) = 1$ ,  $P_1(X) = X$ ,  $P_2(X) = X(X-1)$  et  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2. Soit  $Q(X) = X^2 + X + 1$ . Calculer les composantes de  $Q$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

3. Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!}.$$

**Exercice 14.** Ecrire le nombre rationnel  $1,037037\dots037\dots$  sous la forme  $\frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  sont des nombres entiers.

**Exercice 15.**

1. Donner la nature de la série  $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$  de terme général  $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ .

2. Simplifier la somme partielle  $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$  et en déduire la convergence de la suite

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

3. En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}.$$

**Exercice 16.** En exprimant  $u_n = \frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$  comme somme de deux suites, déterminer selon les valeurs de  $\alpha$  la nature de la série  $\sum u_n$ .