# Fiche 4 - Systèmes d'équations linéaires

**Exercice 1.** On considère les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S_1)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=5 \\ y-z=7 \end{cases},\quad (S_2)\ \begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+y+4z=2 \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture matricielle des systèmes $(S_1)$ et $(S_2)$.
2. Déterminer les applications linéaires associées aux systèmes $(S_1)$ et $(S_2)$.
3. Dire si $(S_1)$ et $(S_2)$ admettent des solutions (sans les calculer).

**Exercice 2.** Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

$$(S_1)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+3z=3 \\ y-z=1 \end{cases},\quad (S_2)\ \begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+y+4z=2 \end{cases},\quad (S_3)\ \begin{cases} x+2y=1 \\ x-y=2 \\ x+3y=3 \end{cases}$$

**Exercice 3.** Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, les systèmes :

$$(S_1) \begin{cases} x-\lambda y-z=0 \\ -2x+(2\lambda+1)y+3z=0 \\ -3x+3\lambda y+(\lambda+4)z=0 \end{cases},\quad (S_2)\ \begin{cases} x+2y+z=\lambda+1 \\ \lambda x+y+(\lambda-1)z=0 \\ x+\lambda y+z=\lambda \end{cases}$$

**Exercice 4.** Calculer, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, les inverses des matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

# Exercices supplémentaires

**Exercice 5.** Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :

$$(S) \begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

**Exercice 6.** Déterminer le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\ \begin{cases} 2x_1+x_2=0 \\ x_1+3x_2=0 \end{cases},\quad (S_2) \begin{cases} 2x_1+x_2=3 \\ x_1+4x_2=3 \end{cases},\quad (S_3) \begin{cases} 2x_1+x_2=3+2i \\ x_1+(4+i)x_2=3+i \end{cases}$$

**Exercice 7.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\text{a) } \begin{cases} x-y+z=0 \\ 5x+2y-z=0 \\ -3x-4y+3z=0\,. \end{cases}\qquad \text{b) } \begin{cases} x-y+z=3 \\ 5x+2y-z=5 \\ -3x-4y+3z=1\,. \end{cases}$$

c) $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13\,. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y+z+t=3 \\ x+2y+z+t=1 \\ x+y+2z+t=2 \\ x+y+z+2t=4 \\ x-y+z-t=0\,. \end{cases}$

**Exercice 8.** En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de $x$ dans les systèmes linéaires suivants :

a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-y=5, \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-3z=2 \\ y=3 \\ 2x+3y-z=1\,. \end{cases}$

En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de $y$ dans les systèmes linéaires suivants :

c) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 4x+3y=2, \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y+z=6 \\ x+y+z=4 \\ 3x+2y+z=8\,. \end{cases}$

**Exercice 9.** (Suite Exercice 4) Calculer les inverses des matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Résoudre les systémes linéaires suivants :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

**Exercice 10.**

1. Déterminer pour quelles valeurs de $a, b$ réelles le système suivant a une solution unique, n'a pas de solution, ou a une infinité de solutions :

$$\begin{cases} ax+2y+az=1 \\ ax+(a+4)y+3az=-2 \\ -ax-2y+z=1 \\ (a+2)y+(3a+1)z=b \end{cases}$$

2. Pour les systèmes homogènes suivants, indiquer s'ils ont une solution unique ou s'ils en ont une infinité, et dans le dernier cas indiquer la dimension de l'espace des solutions.

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -y+3z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5x-2y-2z=0 \\ 4x+z=0 \\ 3z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ z-t=0 \end{cases}$$

**Exercice 11.** Inverser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$