Fiche 3 - Représentations maticielles des applications linéaires, matrice de passage

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

(donnés en composantes dans cette base).

1. Montrer de deux façons différentes que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.
2. En déduire que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Écrire un vecteur quelconque $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^2$ sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$. En déduire la matrice des composantes $M_{\mathcal{C}}(\vec{w})$ du vecteur $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{C}$.
4. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{BC}}$ ainsi que la matrice de passage inverse $P^{-1} = P_{\mathcal{CB}}$.
5. Vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ (donc les matrices $P_{\mathcal{CB}}$ et $P_{\mathcal{BC}}$ sont inverses l'une de l'autre) et que $\binom{x}{y} = P\binom{a}{b}$.

Exercice 2. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés :

$$(a)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y); \quad (b)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y).$$

Exercice 3. Soit $h : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $h(P) = \int_1^X P'(t)dt$.

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (1, 2 + X, X^2)$ est une base pour $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Trouver la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4. Soient $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3$, $f(e_2) = e_2 - e_3$, $f(e_3) = -e_1 + 4e_3$. On considère $v_1 = 2e_1 - e_2$, $v_2 = -e_1 + e_3$, $v_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base pour $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver la matrice A de f dans la base $\mathcal{C}$ et puis trouver la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$. Quelle identité vérifient les matrices A et B ?

Exercices supplémentaires

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (2x - z, -x + 3y + z, z).$$

1. Calculer $f(\vec{0})$, $f(1, 1, 1)$ et $f(1, 0, -1)$.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. Calculer les images de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ par f où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés :

$$(a)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3x + 7y, 2x - 5y); \qquad (b)\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, y - z).$$

Exercice 7. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. On considère les endomorphisms $\frac{d}{dX}$ et $\frac{d^2}{dX^2}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ définis par

$$\frac{d}{dX}(P) = P', \ \frac{d^2}{dX^2}(P) = P''.$$

Calculer la matrice des endomorphisms $\frac{d}{dX}$ et $\frac{d^2}{dX^2}$ dans la base $\mathcal{B}$. Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ?

Exercice 8. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, y - z, x - 2z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $\vec{v}_1$ =Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ les deux applications linéaires définies, en coordonnées cartésiennes, par

$$f(x, y) = (2x + y, -y, x - 2y), \ g(x, y, z) = (x - z, 2y).$$

1. Calculer les applications composées $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
2. Trouver les matrices A et A' qui représentent f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Vérifier que les produits $A'A$ et AA' représentent les composés $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

1. Déterminer la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer f^{-1} et en déduire A^{-1}.
3. Est-ce que l'application f est un isomorphisme ?
4. Si on considère le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^2$, est-ce que l'application f est une isométrie ?

Exercice 11. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à A (par rapport à la base canonique). Soit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donnés en composantes dans la base canonique. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 12. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) est muni de la base canonique. Écrire les matrices des applications linéaires suivantes dans la base canonique :

1. La rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$.
2. La rotation d'angle θ autour de Oz dans $\mathbb{R}^3$.
3. La réflexion par rapport à Ox dans $\mathbb{R}^2$.
4. La réflexion par rapport au plan xOy dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13. Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{D}$) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{R}^2$).

1. Soit $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est :

$$L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer une base de $\ker(L)$ et de $\mathrm{Im}(L)$.

2. Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ donné par la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$:

$$L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer une base de $\ker(L)$ et de $\mathrm{Im}(L)$.

Exercice 14. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $\mathcal{B} = (1, t, X^2)$. Donner la matrice de l'endomorphisme L de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathcal{B}$ qui est défini par : pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $L(P)(X) = P(X-1)$.

Exercice 15. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, x & \mathrm{sh}\, x \\ \mathrm{sh}\, x & \mathrm{ch}\, x \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A(x)$ est inversible d'inverse $A(-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $A(x)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le système $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$.
3. Donner la matrice de passage inverse $P^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ et vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$.
4. Décomposer le vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 17. (*Calcul de A^n*) Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et soit $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E. Soit L l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est donnée par :

$$A = L_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\ker(L)$ et $\mathrm{Im}(L)$, sous-espaces de E et en donner une base. Quel est le rang de L ?
2. On note $\vec{\epsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{\epsilon}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{\epsilon}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Montrer que $B' = (\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$ est une base de E. Préciser la matrice de passage $P = P_{BB'}$ de B à B', ainsi que la matrice inverse P^{-1}.
3. Exprimer $L(\vec{\epsilon}_1), L(\vec{\epsilon}_2), L(\vec{\epsilon}_3)$ dans la base B' et en déduire la matrice $D = L_{B'}$ de L dans la base B'.
4. Quelle relation lie les matrices A, D, P ?
5. Pour tout entier $n \geqslant 1$ exprimer la matrice A^n.