

Fiche 8 - Suites et séries de fonctions, séries entières

Exercice 1. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_n$ suivantes :

$$(1) f_n(x) = \frac{2^{-x} n + x}{n + x} \text{ sur } [0, 1], \quad (2) f_n(x) = \frac{x^3}{(1 + x^2)^n} \text{ sur } [0, +\infty[.$$

Exercice 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Montrer que sa limite f est continue sur \mathbb{R} .
3. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = -2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 + x^2)^2}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières à variables complexes suivantes :

$$(1) \sum \frac{z^n}{n^2}, \quad (2) \sum \frac{(-1)^n}{2^n \sqrt{n}} z^n, \quad (3) \sum \frac{z^{3n}}{2^n}, \quad (4) \sum \frac{z^{n^2}}{n}.$$

Exercice 4. Exprimer la somme de chaque série entière sur son disque de convergence que l'on précisera :

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad (2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} z^n, \quad (3) \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n, \quad (4) \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1) z^{3n+2}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 5. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_n$ suivantes :

$$(1) f_n(x) = \frac{x}{1 + nx}, \text{ sur } [0, 1], \quad (2) f_n(x) = \sin \frac{nx}{1 + nx}, \text{ sur } [0, +\infty[,$$

$$(3) f_n(x) = n x^2 e^{-nx}, \text{ sur } [0, \pi], \quad (4) f_n(x) = \sqrt{n} x e^{-nx}, \text{ sur } [0, +\infty[.$$

Exercice 6. Étudier la nature des séries $\sum f_n$, de terme général :

$$(1) f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}, \text{ sur } [0, +\infty[, \quad (2) f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}, \text{ sur } [0, +\infty[.$$

Exercice 7. Étudier la nature des séries $\sum f_n$, de terme général :

$$(1) f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2}, \text{ sur }]0, +\infty[, \quad (2) f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}, \text{ sur } \mathbb{R},$$

$$(3) f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right), \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Exercice 8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n(x) = n e^{-nx}.$$

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$ vers une fonction qu'on notera f .
3. Calculer une primitive de f .
4. Calculer la valeur de f .

Exercice 9. On définit pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que ζ est bien définie et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+n+|x|}.$$

Étudier la convergence uniforme de la série $\sum f_n$.

Exercice 11. Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \sin(x) \cos^n(x) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$$

Exercice 12. Soit $I =]1, +\infty[$. Pour $x \in I$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$.

1. Montrer que f est définie sur I .
2. Montrer que f est continue sur I .
3. Montrer que f est de classe C^1 sur I .

4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 13. Étudier la convergence éventuelle de la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$. Donner un équivalent de la somme en 0.

Exercice 14. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n(x) = \frac{1}{n + n^2x}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

1. Montrer que f est correctement définie et continue sur \mathbb{R}^{+*} .
2. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 15. Déterminer le rayon de convergence des séries entières à variables complexes suivantes :

$$(1) \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n, \quad (2) \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n, \quad (3) \sum \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n, \quad (4) \sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1}.$$

Exercice 16. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$(1) \sum \frac{n^3 + 1}{3^n} x^n, \quad (2) \sum \frac{\ln n}{n^3} x^n, \quad (3) \sum \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n} x^n, \quad (4) \sum \sin^3\left(\frac{1}{n}\right) x^n.$$

Exercice 17. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Exercice 18. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{pn}$.

Exercice 19. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Étudier la convergence en $-R$ et en R .

Exercice 20. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n} x^n.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f .