Corrigé du CC1 - Math 3

Question 1

a) $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\vec{x} = \vec{0}\} = \mathrm{Ker}(A)$

$$\vec{x} \in V \iff A\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \quad - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 \quad - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \quad - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0 + x_2 - 2x_3 + 0 = 0 \\ 0 - x_2 + 2x_3 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Système de rang 2 $\Rightarrow \dim V = 4 - 2 = 2$

On prend $x_3 = \lambda$ et $x_4 = \mu$ comme paramètres libres

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda - 2\mu \\ x_2 = 2\lambda \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b) $V = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\underline{\{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ base de } V}$

c) $\dim V = 2$

Question 2

a) Une famille de vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$ possède <u>au plus</u> 3 vecteurs.

Donc, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ ne sont pas linéairement indép.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$

donc les 3 vecteurs $[\vec{u}]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $[\vec{z}]_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ $\boxed{B = \{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{z} \}}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

c) $P_{EB} = \left([\vec{u}]_E \ [\vec{v}]_E \ [\vec{z}]_E \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

d) Calcul de $P_{BE} = (P_{EB})^{-1}$ par Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8/12 & -4/12 & -4/12 \\ 0 & 1 & 0 & 2/12 & 2/12 & -4/12 \\ 0 & 0 & 1 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \end{array}\right)$$

$$P_{BE} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) $[\vec{s}]_B = P_{BE} [\vec{s}]_E = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Question 3

$W = \{ p \in \mathbb{R}_2[t] \mid p(1) = 0 \}$ est non vide (contient $p = 0$)

W est stable par addition :

$p_1 \in W, p_2 \in W \Rightarrow (p_1 + p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = 0 \Rightarrow p_1 + p_2 \in W$

W est stable par produit avec les scalaires :

$p \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda p)(1) = \lambda p(1) = 0 \Rightarrow \lambda p \in W$

Donc W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[t]$