Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L2 - UE Math 3**

Corrigé de la seconde session – Mardi 19 Juin 2018

Durée 2h

Réglement – Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il est permis de consulter une feuille de notes personnelles A4 recto-verso.

Exercice 1 [6 points = 1+1.5+1+1.5+1] – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A.
2. En déduire les valeurs propres de A ainsi que le déterminant $det\ A$ et le noyau ker A.
3. Déterminer l'espace propre associé à la plus petite valeur propre de A.
4. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que l'espace propre associé à la plus grande valeur propre de A est engendré par e_2 et $e_1 - e_3$. Quelle est sa dimension ?
5. Donner une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $D = P^{-1}AP$.

Rép.– 1) On a

$$P_A(X) = det \begin{pmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{pmatrix} = (4-X) det \begin{pmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{pmatrix}$$

Or

$$det \begin{pmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{pmatrix} = X^2 - 6X + 8 = (X-4)(X-2).$$

D'où

$$P_A(X) = (2-X)(4-X)^2.$$

2) Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$. On a aussi $det\ A = P_A(0) = 32$. Ce

déterminant est non nul donc ker A est réduit à $\{0\}$.
3) La plus petite valeur propre est $\lambda_1 = 2$ et l'espace propre correspondant est $E_{\lambda=2} = \{v = (x, y, z) \mid Av = 2v\}$. Notons que

$$Av = 2v \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - z & = & 2x \\ 2x + 4y + 2z & = & 2y \\ -x + 3z & = & 2z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x \\ y & = & -2x \end{array} \right.$$

Si on note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique, on obtient $E_{\lambda=2} = Vect(e_1 - 2e_2 + e_3)$.
4) La plus grande valeur propre est $\lambda_2 = 4$ et $E_{\lambda=4} = \{v = (x, y, z) \mid Av = 4v\}$. On a

$$Av = 4v \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - z & = & 4x \\ 2x + 4y + 2z & = & 4y \\ -x + 3z & = & 4z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & -x \end{array} \right.$$

Par conséquent, $v \in E_{\lambda=4}$ si et seulement s'il s'écrit sous la forme $v = x(e_1 - e_3) + ye_2$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit $E_{\lambda=4} = Vect(e_1 - e_3, e_2)$. Comme $e_1 - e_3$ et e_2 sont linéairement indépendants, la dimension de $E_{\lambda=4}$ est 2.
5) D'après les questions précédentes

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

conviennent.

Exercice 2 [3 points = 0.5+1.5+1] –

Quelle est la nature des séries numériques suivantes ?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10000}}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Rép.– 1) Soit $u_n = \frac{1}{2n+1}$. Puisque $u_n > 0$ et $u_n \sim \frac{1}{2n}$, la série $\sum u_n$ est de même nature que $\frac{1}{2} \sum \frac{1}{n}$. Elle est donc divergente d'après la règle de Riemann ($\alpha = 1$).
2) La série est à termes positifs. Soit $u_n = \frac{n^{10000}}{n!}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{10000}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^{10000}} = \frac{(n+1)^{10000}}{(n+1)n!} \frac{n!}{n^{10000}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000} \frac{1}{n+1}$$

Ce quotient a pour limite 0. Comme cette limite est < 1, on en déduit par la règle de d'Alembert que la série converge.
3) Soit $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, on a $u_n = (-1)^n_n$ et $v_n > 0$ donc la série est alternée. En multipliant par la quantité conjuguée, on remarque que

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Puisque $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit aussi que la suite (v_n) est décroissante. La règle des séries alternées s'applique et montre que $\sum u_n$ converge.

Exercice 3 [5 points = 2.5+1+1+0.5] On considère l'équation différentielle

$$y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \quad (E)$$

dont on cherche les solutions développables en série entière au voisinage de zéro.

1. Montrer que si $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une solution de (E) sur $]-R, R[$, $R > 0$, alors pour tout $n \geq 0$ on a
$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}.$$
2. On suppose désormais que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Montrer que $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{1}{p!}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ et en déduire le rayon de convergence de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{p!}$.
4. Exprimer $\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p}$ au moyen d'une exponentielle.

Rép.– 1) Pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Soit $h(x) = y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_n\big)x^n \end{aligned}$$

Par conséquent, $h \equiv 0$ entraîne

$$(n+2)a_{n+2} - 2a_n = 0$$

2) On a $a_0 = y(0) = 1$ et $a_1 = y'(0) = 0$. Il en résulte que tous les coefficients impairs sont

nuls et que $a_{2p+2} = \frac{a_p}{p+1}$, puis $a_{2p} = \frac{a_0}{p!}$.
3) Posons $b_n = \frac{1}{n!}$. On a

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Ce quotient a pour limite $\ell = 0$, on en déduit par la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$. En remplaçant X par x^2, on en déduit que le rayon de convergence de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{p!}$ est également $+\infty$.
4) Puisque $e^X = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!}$, on en déduit que $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{p!} = e^{x^2}$.

Exercice 4 [6 points = 1+2+1+1+1] Soit f la fonction 2π-périodique impaire définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$. On note

$$Sf = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

sa série de Fourier.

1. Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.
2. Montrer que le coefficient b_n est donné par $b_n = \left((-1)^{n+1} + 1\right) \frac{4}{\pi n^3}$ (*Indication* : effectuer deux intégrations par parties).
3. Montrer que l'on a

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} + 1\right) \frac{2}{n^3} \sin(nx)$$

4. Pour quel $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
5. En déduire la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$
6. En appliquant l'égalite de Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$$

calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}.$$

Rép.– 2) On a

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-f(x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}dx \end{aligned}$$

car $f(0) = f(\pi) = 0$. Notons que $f'(x) = \pi - 2x$ sur $]0, \pi[$. On a

$$\begin{aligned} nb_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi f''(x)\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) \\ &= \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nx)dx \end{aligned}$$

puisque $f''(x) = -2$. Finalement

$$b_n = \frac{4}{n^2\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{4}{n^3\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right).$$

3) On a d'une part $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{8}{\pi(2p+1)^3}$ et d'autre part $a_n = 0$ car f est impaire. Ainsi

$$Sf(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin((2p+1)x)}{(2p+1)^3}.$$

4) La fonction f satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet. L'application de ce théorème montre que $Sf(x) = f(x)$ sur tout $\mathbb{R}$.
5) On a

$$Sf(\frac{\pi}{2}) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^3} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Or $Sf(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$ d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

6) On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2(\pi-x)^2dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2x^2 - 2\pi x^3 + x^4)dx \\ &= \left[\pi^2\frac{x^3}{3} - 2\pi\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^\pi \\ &= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)\pi^4 = \frac{\pi^4}{15} \end{aligned}$$

ainsi, l'égalite de Parseval s'écrit

$$\frac{\pi^4}{15} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^2}{(2n+1)^6 \pi^2}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$