Chapitre 1: Algèbre Linéaire

V. 7. 1. Systèmes de Cramer

Définition

On dit qu'un système de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si la matrice A de ce système est inversible.

Proposition

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Quel que soit B, le système (S) admet une solution et une seule.
- Quel que soit B, le système (S) admet au moins une solution.
- Quel que soit B, le système (S) admet au plus une solution.
- Le système homogène associé au système (S) n'admet que la solution triviale.
- La matrice A du système (S) est inversible.
- $\det(A) \neq 0$.

La solution unique du système (S) est alors $X = A^{-1}B$.

Proposition (Règle de Cramer)

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$.

Pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit A_i la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par le second membre B.

Supposons que (S) est de Cramer (donc $\det(A) \neq 0$). Alors l'unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$ de (S) est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Exemple

Soit

$$(S)\ \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Donc (S) est un système de Cramer et l'unique solution est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9}{1} = 9,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{1} = -4.$$

V. 7. 2. Méthode du pivot de Gauss

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est échelonnée si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

Autrement dit : le nombre de coefficients nuls commençant la ligne L_{i+1} est strictement plus grand que le nombre de coefficients nuls commençant la ligne L_i.

Un système (S) est dit échelonné si sa matrice est échelonnée.

Exemple

Les matrices suivantes sont échelonnées

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est échelonnée réduite si elle est échelonnée et si le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Un système (S) est dit échelonné réduit si sa matrice est échelonnée et réduite.

Exemple

Les matrices suivantes sont échelonnées et réduites

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices suivantes sont échelonnées mais pas réduites

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La méthode de pivot de Gauss consiste à transformer un système, en utilisant des "opérations élémentaires", à un système échelonné réduit. Il se trouve que les systèmes échelonnés réduits sont plus faciles à résoudre.

Exemple

Soit

$$(S)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

qui est échelonné et réduit ; car sa matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est échelonnée et réduite. Alors l'ensemble des solutions est

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 1 - 2\lambda, x_2 = \lambda, x_3 = 4, x_4 = 3;\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Définition

Les opérations suivantes sur les équations d'un système linéaire (ou sur les lignes de sa matrice) sont appelées des opérations élémentaires :

- $\lambda L_i \to L_i$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$: multiplier l'équation L_i par le scalaire non nul λ.
- $L_i + \lambda L_j \to L_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \neq j$: rajouter à l'équation L_i, l'équation L_j multipliée par le scalaire λ.
- $L_i \leftrightarrow L_j$: permuter les deux équations L_i et L_j.

Propriété

Les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système. Ils transforment un système linéaire à un autre systèmes ayant le même ensemble de solutions.

Mise en pratique

Étape 1 : échelonnement

- Il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul. Si ce n'est pas le cas, on permute la ligne L_1 par la première ligne dont le premier coefficient est non nul : $L_1 \leftrightarrow L_j$.
- Si le premier coefficient de la première ligne est différent de 1, on multiplie L_1 par $1/a_{11}$: $1/a_{11}L_1 \rightarrow L_1$. Nous avons un pivot en position $(1, 1)$.
- Le pivot sert à éliminer tous les autres termes sur la même colonne : pour $2 \leq i \leq n$, on remplace l'équation L_i par $L_i - a_{i1}L_1$, on élimine ainsi x_1 dans l'équation L_i.

On obtient un système avec une équation L_1 contenant x_1 et les autres équations ne contenant pas de x_1 :

$$(S') \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1m}x_m & = & b'_1 \\ 0 & + & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{im}x_m & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & + & a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{array} \right.$$

On abouti ainsi à un nouveau système, on recommence les étapes ci-dessus pour éliminer x_2 :

$$(H) \left\{ \begin{array}{ccccccc} a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{im}x_m & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{array} \right.$$

Exemple

Soit

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + 3z = 4 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires directement sur la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 - L_1 \to L_3]{L_2 - L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{2L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 + \frac{3}{2}L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{9}L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Étape 2 : réduction
En partant de la dernière ligne et en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot, on applique la même méthode que celle de l'étape d'échelonnement, en allant du bas à droite vers le haut à gauche.

Exemple

Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2-5L_3\to L_2]{L_1-\frac{1}{2}L_3\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1-\frac{1}{2}L_2\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Étape 3 : resolution

Maintenant le système est échelonné et réduit, sa résolution est plus simple.

Exemple

Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée réduite obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

Le système devient

$$\left\{\begin{array}{c} x = -5/9 \\ y = 8/9 \\ z = 11/9 \end{array}\right.$$

et la solution, dans ce cas, est évidente.

Exemple 2

Considérons le système

$$(S)\ \left\{\begin{array}{c} -y+2z+13t=5 \\ x-2y+3z+17t=4 \\ -x+3y-3z-20t=-1 \end{array}\right.$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right)$$

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 + L_1 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-L_2 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2} L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Exemple 2

Pour réaliser la réduction, on remonte à partir de la dernière ligne en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2+2L_3\to L_2]{L_1-3L_3\to L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1+2L_2\to L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Exemple 2

Le système (S) est maintenant équivalent à

$$\begin{cases} x - 4t = -2 \\ y - 3t = 3 \\ z + 5t = 4 \end{cases}$$

où x, y, z sont les variables principales et t est la variable secondaire (ou paramètre). L'ensemble des solutions est

$$\Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2 + 4\lambda, y = 3 + 3\lambda, z = 4 - 5\lambda, t = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}\Big\}$$

$$= (-2, 3, 4, 0) + Vect\Big((4, 3, -5, 1)\Big).$$

V. 8. Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Si A est une matrice carrée inversible de type (n, n) et B est l'inverse de A, alors

$$AB = I_n$$

Si $B_1, \ldots, B_n$ sont les colonnes de B , l'équation matricielle précédente est équivalente aux n équations

$$AB_i = \vec{e_i}, i = 1, ..., n.$$

Donc calculer B revient à résoudre n systèmes d'équations linéaires ayant la même matrice A.
Pour calculer la matrice inverse, on applique la méthode de Gauss pour résoudre les systèmes précédents parallèlement.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On écrit alors le tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et on applique la méthode de Gauss.

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

Exemple

Donc la matrice inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

VI. Réduction des endomorphismes

VI. 1. Introduction

Rappel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme.
- L'espace vectoriel des endomorphismes est noté $End(E)$.

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in End(E)$. Si on se place dans une base $\mathcal{B}$ de E, on peut représenter f par une matrice. On prend la même base pour E comme ensemble de départ que pour E comme ensemble d'arrivée. On note cette matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$.
Si $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n})$ et les composantes de chaque $f(\vec{e_j})$

$$f(\vec{e_j}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

alors

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+2y, -x+4y).$$

Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $Can = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Alors

$$f(\vec{e}_1) = f(1,0) = (1,-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{Can},$$

$$f(\vec{e}_2) = (0,1) = (2,4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{Can}.$$

Donc

$$M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si on considère maintenant $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ où

$$\vec{u} = (2,1), \quad \vec{v} = (1,1)$$

alors

$$f(\vec{u}) = f(2,1) = (4,2) = 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{v}) = f(1,1) = (3,3) = 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

et donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à un endomorphisme f dépend de la base choisie : pour deux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, les matrices $M_{\mathcal{B}_1}(f)$, $M_{\mathcal{B}_2}(f)$ ne sont pas forcément identiques.

L'objectif de la réduction d'un endomorphisme, c'est de trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit la plus simple possible.

Les matrices les plus simples sont les matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elles sont simples : la somme, la multiplication, la puissance n-ème, ... etc, se ramène à des opérations simples.

Exemple

Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}.$$

VI.2. Définition, propriétés

Définition 1

On dit d'un endomorphisme f qu'il est diagonalisable, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On dit d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'elle est diagonalisable, si l'application linéaire qui lui est associée est diagonalisable.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \;\; f(x,y) = (x+2y, -x+4y).$$

Alors, dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ où

$$\vec{u} = (2,1), \;\; \vec{v} = (1,1)$$

la matrice de f est

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc f est diagonalisable.

Questions

Comment savoir s'il existe une base telle que l'application est diagonalisable et s'il existe comment la chercher ?

VI. 3. Vecteurs propres, valeurs propres

Définition 4 (Vecteurs propres, valeurs propres)

Soit $f \in End(E)$.

- Un vecteur $\vec{u} \in E$ est un vecteur propre de f si :
  - $\vec{u} \neq \vec{0}$,
  - il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.
- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe $\vec{u} \in E$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur propre de f, l'unique scalaire λ vérifiant $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ est appelé la valeur propre associée à $\vec{u}$.

Remarque

Si $\vec{u}$ est un vecteur propre de f, alors pour tout scalaire α non nul, $\alpha\vec{u}$ est un vecteur propre de f.
En effet,

$$f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) = \alpha\lambda\vec{u} = \lambda(\alpha\vec{u}).$$

On définit les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices, en utilisant les applications linéaires associées.

- Un vecteur $\vec{u} \in E$ est un vecteur propre de A s'il est pour l'application linéaire associée.
- De même, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si elle l'est pour l'application linéaire associée.

Cela revient à dire :

- Un vecteur $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ est un vecteur propre de A si $\vec{u} \neq 0$ et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- De même, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proposition 1

L'endomorphisme f est diagonalisable, si et seulement si, il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Preuve

Si f est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$. D'où $\vec{u}_i$ est un vecteur propre.

Réciproquement, si E admet une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ formée de vecteurs propres de f, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe λ_i tel que $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$. Donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et f est diagonalisable. □

Rappel

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Alors

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) &= P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\ &= P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^{-1} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \end{aligned} .$$

Définition 3

On dit que la matrice A est semblable à B s'il existe une matrice inversible P tel que $P^{-1}AP = B \Longleftrightarrow A = PBP^{-1}$.

Propriétés

- Une matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.
- Si A est diagonalisable et si $\mathcal{B}$ est la base dans laquelle A (ou l'application linéaire qui lui est associée) est représentée par une matrice diagonale D alors

$$P^{-1}AP = D$$

  où $P = P_{Can,\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique Can à $\mathcal{B}$.

Remarque

Diagonaliser une matrice carrée A revient à trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P tel que $P^{-1}AP = D$. On cherche une base $\mathcal{B}$, dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale D et on prend P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.

La traduction de la proposition 1 pour les matrices :

Proposition 1 bis

Une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable ssi elle possède n vecteurs propres formant une base de $\mathbb{K}^n$.

VI. 4. Sous-espaces propres

Rappel

Soient U et V deux s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E.

- On appelle somme de U et V l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme $U + V$ est directe si $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- On dit du s.e.v F qu'il est la somme directe de U et V si
  - $F = U + V$;
  - $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

  On écrit $F = U \oplus V$.

Plus généralement, soient $U_1, \ldots, U_m$, des s.e.v de E. On dit que E est la somme directe de $U_1, \ldots, U_m$ et on écrit $E = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$ si :

- $E = U_1 + U_2 \cdots + U_m = \{\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m \mid \vec{u}_i \in U_i\}$,
- pour tout $\vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2, \ldots, \vec{u}_m \in U_m$:

$$\text{si } \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m = \vec{0} \text{ alors } \vec{u}_i = \vec{0} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m.$$

Propriété

Soient $U_1, \ldots, U_m$, des s.e.v de E. Pour chaque $1 \leq i \leq m$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de U_i. Alors E est la somme directe de $U_1, \ldots, U_m$, si et seulement si, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ est une base de E.

Définition 4

Soit f un endomorphisme de E et soit λ une valeur propre de f. On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ de f, le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(f) = Ker(f - \lambda Id_E) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A, on définit d'une façon similaire le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de A

$$E_\lambda(A) = \{\vec{u} \in E \mid A\vec{u} = \lambda\vec{u}\}.$$

Proposition 2

L'endomorphisme f est diagonalisable, si et seulement si, E est somme directe de ses sous-espaces propres.

Autrement dit, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de f, deux à deux distinctes, f est diagonalisable si et seulement si

$$E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}(f).$$

Corollaire 1

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de f, deux à deux distinctes, f est diagonalisable si et seulement si

$$\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}(f)) + \cdots + \dim(E_{\lambda_m}(f)).$$

Corollaire 2

Si $\dim(E) = n$ et f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Question

Comment trouver les valeurs propres ?

VI. 5. Polynôme caractéristique

Définition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Alors $P_A(X)$ est un polynôme de degré n, appelé le polynôme caractéristique de A.

Exemple

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors
$$A - XI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-X & 3 \\ 4 & 2-X \end{pmatrix}.$$

On a
$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 4 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X) - 12 = X^2 - 3X - 10.$$

Soit $f \in End(E)$. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors

$$M_{\mathcal{B}_1}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}_2}(f) P$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$. On a

$$\det(M_{\mathcal{B}_1}(f) - XI_n) = \det(P^{-1} M_{\mathcal{B}_2}(f) P - XI_n)$$

$$= \det(P^{-1}(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n)P) = \det(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n).$$

Cela permet de définir :

Définition 6

Soit $f \in End(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On définit le polynôme caractéristique de f par :

$$P_f(X) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - XI_n).$$

(Donc il ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$).

Proposition 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de A, si et seulement si, λ est racine du polynôme caractéristique de A.

Preuve

- Si λ est une valeur propre de A, alors il existe $\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq 0$ tel que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Donc $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$. Donc $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- Si $\det(A - \lambda I_n) = 0$, alors $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc il existe $\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq 0$ tel que $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$ et donc $\vec{u} \neq 0$ tel que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Donc λ est une valeur propre.

$\square$

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 5 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X).$$

Donc les valeurs propres de A sont 1 et 2.

Rappel sur les polynômes

- Une racine λ d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, est une racine de multiplicité m si $(X-\lambda)^m$ divise $P(X)$ mais $(X-\lambda)^{m+1}$ ne divise pas $P(X)$.
- Un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, de degré n, est dit scindé dans $\mathbb{K}[X]$, s'il peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a(X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_p)^{m_p}$$

où $m_i \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}^*$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (et $m_1 + \cdots + m_p = n$).

Exemple

(1) Soit

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Alors

$$P(X) = (X-1)^2(X-3).$$

La multiplicité de la racine $\lambda_1 = 1$ est 2 et la multiplicité de la racine $\lambda_2 = 3$ est 1. On voit aussi que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ mais aussi dans $\mathbb{C}[X]$.

(2) Le polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ car il n'admet pas de racine réelle. Par contre il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = (X - j)(X - \bar{j})$ où $j = e^{i\pi/3}$.

Définition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A.

- La multiplicité algébrique de λ est la multiplicité de λ comme racine de $P_A(X)$.
- La multiplicité géométrique de λ est la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$.