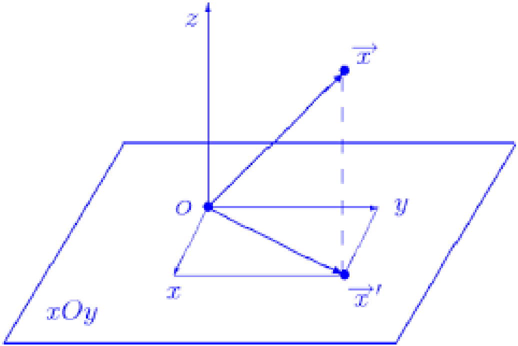
Chapitre 1: Algèbre Linéaire

V. 4. Projection orthogonale



Proposition

Soit A une partie non vide de E. L'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A, noté $A^{\perp}$

$$A^{\perp} = \{\vec{x} \in E | \vec{x} \perp \vec{y} \text{ pour tout } y \in A\}$$

est un s.e.v de E appelé l'orthogonal de A.

Proposition

Pour tout s.e.v F de dimension finie de E on a $E = F \oplus F^{\perp}$.

Théorème (projection orthogonale)

Soit F un s.e.v de dimension finie de E. Pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, il existe un unique vecteur y dans F tel que :

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = d(\vec{x}, F) = \inf_{\vec{z} \in F} \|\vec{x} - \vec{z}\|.$$

C'est l'unique vecteur appartenant à F vérifiant $\vec{x} - \vec{y} \in F^{\perp}$.

Pour $\vec{x} \in E$, le vecteur $\vec{y}$ de F fourni par le théorème précédent peut être vu comme la meilleure approximation de $\vec{x}$ dans F.

On dit que $\vec{y}$ est la projection orthogonale de x sur F. On note $\vec{y} = p_F(\vec{x})$.

On a $E = F \oplus F^{\perp}$ et

$$\vec{x} = p_F(\vec{x}) + (\vec{x} - p_F(\vec{x}))$$

avec $p_F(\vec{x}) \in F$ et $\vec{x} - p_F(\vec{x}) \in F^{\perp}$.

V. 4. Bases orthonormées, orthonormalisation

Définition

On dit d'un vecteur $\vec{x} \in E$ qu'il est unitaire si $\|\vec{x}\| = 1$.

Définition

Soit $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{C}$ est orthonormée si $\mathcal{C}$ est orthogonale et si $\vec{u}_i$ est unitaire pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Définition

Une base de E qui forme une famille orthonormée est appelée base orthonormée.

Autrement dit : une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E est une base orthonormée si

- $\|\vec{e}_i\| = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $\langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = 0$ pour tout i, j avec $i \neq j$.

Exemples

Exemple

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

la base canonique $Can = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormée. Il faut vérifier (exercice)

- $\|\vec{e}_i\| = 1$,
- $\langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = 0$ pour tout i, j avec $i \neq j$.

Proposition (Lecture des composantes dans une base orthonormée)

Soit E un espace euclidien ou hermitien. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E. Alors pour tout $x \in E$, on a

$$\vec{x} = \langle \vec{x} | \vec{e}_1 \rangle \, \vec{e}_1 + \cdots + \langle \vec{x} | \vec{e}_n \rangle \, \vec{e}_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = | \langle \vec{x} | \vec{e}_1 \rangle |^2 + \cdots + | \langle \vec{x} | \vec{e}_n \rangle |^2.$$

Donc

$$x = \begin{pmatrix} \langle \vec{x} | \vec{e}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{x} | \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Proposition

Soit F un s.e.v. de dimension finie de E. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base orthonormée de F. Alors pour tout $\vec{x} \in E$, la projection orthogonale de x sur F est donnée par

$$p_F(x) = \langle \vec{x} | \vec{e}_1 \rangle \, \vec{e}_1 + \cdots + \langle \vec{x} | \vec{e}_p \rangle \, \vec{e}_p.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, calculons la projection orthogonale de $\vec{u} = (2,1,1)$ sur la droite vectorielle $F = Vect((1,1,0))$.

- base orthonormée de F : $\|(1,1,0)\| = \sqrt{2}$ et donc en posant $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ on obtient une base orthonormée de F
- On a

$$p_F(\vec{u}) = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle \, \vec{v} = (\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0).$$

Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Alors il existe une base $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ de E, orthonormée et vérifiant $Vect(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_j) = Vect(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_j)$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

On construit les vecteurs $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ par récurrence, selon un procédé appelé le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, comme suit :

1. On pose $\vec{f}_1 = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}$.
2. Supposons que la famille $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_j)$ est construite, $1 \leq j \leq n-1$, on définit alors $\vec{f}_{j+1}$ par

$$\vec{f}_{j+1} = \frac{\vec{e}_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \left\langle \vec{e}_{j+1} | \vec{f}_k \right\rangle \vec{f}_k}{\left\| \vec{e}_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \left\langle \vec{e}_{j+1} | \vec{f}_k \right\rangle \vec{f}_k \right\|}.$$

Remarque

Remarquons que le vecteur

$$\sum_{k=1}^{j} \left\langle \vec{e}_{j+1} | \vec{f}_k \right\rangle \vec{f}_k$$

est la projection orthogonale de $\vec{e}_{j+1}$ sur l'espace vectoriel engendré par $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_j$. Par conséquent, le vecteur

$$\vec{e}_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \left\langle \vec{e}_{j+1} | \vec{f}_k \right\rangle \vec{f}_k$$

est orthogonal à l'espace vectoriel engendré par $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_j$. Pour le rendre unitaire il suffit de le diviser par sa norme

$$\frac{\vec{e}_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \left\langle \vec{e}_{j+1} | \vec{f}_k \right\rangle \vec{f}_k}{\left\| e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \left\langle \vec{e}_{j+1} | \vec{f}_k \right\rangle \vec{f}_k \right\|}.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ considérons

$$\vec{u}_1 = (1, -1, 0);\ \vec{u}_2 = (0, 2, 1) \text{ et } F = Vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

et calculons une base orthonormée de F par le procédé de Gram-Schmidt. On pose

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$$

on voit alors $\|\vec{v}_1\| = 1$ et $Vect(\vec{u}_1) = Vect(\vec{v}_1)$. On a

$$u_2 - \langle \vec{u}_2 | \vec{v}_1 \rangle\, \vec{v}_1 = (0, 2, 1) + \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0) = (1, 1, 1)$$

et on pose donc

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2 | \vec{v}_1 \rangle\, \vec{v}_1}{\|\vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2 | \vec{v}_1 \rangle\, \vec{v}_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

D'où $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base orthonormée de F.

Corollaire 1 (Existence des bases orthonormées)

Tout espace euclidien ou hermitien admet des bases orthonormées.

Corollaire 2 (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Soit E un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \geq 1$. Soit $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_p})$, où $1 \leq p \leq n-1$, une famille orthonormée de E. Alors il existe $\vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e_n}$ de E tel que $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_p}, \vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e_n})$ soit une base orthonormée de E.

V. Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

V. 5. Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

Nous avons vu à la section sur la réduction des endomorphismes qu'étant donnée une matrice A, on cherche une matrice diagonale D semblable à A ; ou d'une façon équivalente, on cherche une base $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

Dans les espaces euclidiens ou hermitiens, où nous disposons d'un produit scalaire, on peut se demander, étant donnée une matrice A, s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

Nous verrons que les matrices qui vérifient cette propriété dans les espaces euclidiens sont les matrices symétriques et dans les espaces hermitiens sont les matrices hermitiennes.

V. 5. 1. Matrices symétriques

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$ une matrice de type (n, m) à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La transposée de A, notée ${}^tA$, est la matrice de type (m, n) définie par : pour $1 \leq j \leq n$, la colonne j de ${}^tA$ est égale à ligne j de A.

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Alors

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Définition

On dit que A est symétrique si elle est égale à sa transposée.

$$A \text{ est symétrique si et seulement si } A = {}^tA.$$

Exemple

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

est symétrique, alors que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

n'est pas symétrique car $B \neq {}^tB$

$${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable dans une base orthonormée s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ et une matrice diagonale D tels que

$$A = P_{Can\mathcal{B}} D P_{Can\mathcal{B}}^{-1}.$$

(Rappel : *Can* est la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si A est symétrique.

Soient E un espace euclidien de dimension n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Alors les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A sont deux-à-deux orthogonaux.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est symétrique, alors il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D tel que $A = PDP^{-1}$.

Que peut-on dire de plus sur la matrice P ? Vérifie-t-elle des propriétés particulières ?

Elle est en fait orthogonale.

Définition

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que P est orthogonale si $P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I_n$. Autrement dit si P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La première représente une rotation d'angle θ et le seconde représente une symétrie orthogonale.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est semblable à une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soient E un espace euclidien de dimension n et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors P est orthogonale si et seulement si P est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E.

Mise en pratique

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

et cherchons une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P tel que $A = PDP^{-1}$. Comme A est symétrique cela est possible.
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Les sous-espaces propres sont

$$E_{-1/2}(A) = Vect((1,-1)),\ E_{5/2} = Vect((1,1))$$

et par conséquent, en posant $\vec{u} = (1,-1)$ et $\vec{v} = (1,1)$, $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de vecteurs propres de A. Pour avoir une base orthonormée, on prend les vecteurs unitaires

$$\vec{u}' = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), \quad \vec{v}' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

et donc $\mathcal{B}' = (\vec{u}', \vec{v}')$ est une base orthonormée dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

On a finalement

$$D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } A = PD\,{}^tP.$$

V. 5. 2. Matrices hermitiennes

Dans un espace hermitien, les matrices symétriques ne sont pas suffisantes pour caractériser les matrices diagonalisables dans des bases orthonormées.

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n}$ une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La conjuguée de A, notée $\overline{A}$, est la matrice carrée (n, n) dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

Soit A une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. La transconjuguée de A est la transposée de la conjuguée de A, elle est notée A^*.

Donc $A^* = {}^t\overline{A}$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3 \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -2i & 3 \end{pmatrix},\ A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$

Définition

Soit A une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On dit que A est hermitienne si $A = A^*$.

Exemple

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \ \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}, \ B^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

et donc B est hermitienne.

Proposition

Soient E un espace hermitien de dimension n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si A est hermitienne.

Soient E un espace hermitien de dimension n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne. Alors les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A sont deux-à-deux orthogonaux.

Soient E un espace hermitien de dimension n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De même ici, si A est hermitienne, alors il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D tel que $A = PDP^{-1}$.

Que peut-on dire de plus sur la matrice P ? Vérifie-t-elle des propriétés particulières ?

Dans le cas des espaces hermitiens, elle est en fait unitaire.

Définition

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que P est unitaire si $P \cdot P^* = P^* \cdot P = I_n$. Autrement dit si P est inversible et $P^{-1} = P^*$.

Proposition

Soient E un espace hermitien de dimension n et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors P est unitaire si et seulement si P est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E.