Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Rappel

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe $\vec{u} \in E$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u} \in E$ est appelé un vecteur propre.
- La solution du système $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ est appelée sous-espace propre associé à la valeur propre λ de f et notée par $E_\lambda(f)$.
- Soit $A = M_B(f)$, le polynôme caractéristique de A (et donc f) est le polynôme de degré n

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Rappel

Les suivants sont equivalent

- $f : E \to E$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.
- $f : E \to E$ est diagonalisable si et seulement si $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}(f)$.
- $f : E \to E$ est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé et pour chaque valeur propre λ_i, sa multiplicité algébrique coïncide avec sa multiplicité géométrique.

VI. 6. Diagonalisation

Théorème (CNS pour la diagonalisation)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$: dans ce cas

  $$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}$$

  où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres ; m_i est la multiplicité algébrique de λ_i.
- Pour chaque valeur propre λ_i, sa multiplicité algébrique coïncide avec sa multiplicité géométrique : $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$.

Corollaire)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est scindé à des racines simples, alors A est diagonalisable.

Mise en pratique

- On calcul le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
- On cherche les racines de $P_A(X)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, et les multiplicités algébriques $m_1, \ldots, m_p$.
  - Si $P_A(X)$ n'est pas scindé, alors A n'est pas diagonalisable.
  - Si $P_A(X)$ est scindé, on cherche les bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$. Si pour chaque i, $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$, alors A est diagonalisable :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

  où chaque λ_i est répété m_i-fois.

Dans ce cas, si $\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(A)$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A. On a alors $P^{-1}AP = D$ où $P = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

Exemples

Exemples

(1) Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
On a
$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -3 \\ 3 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 13.$$
Le discriminant est strictement négatif et donc $P_A(X)$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$. Donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(2) Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
On a
$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$
et donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P_A(X)$ admet deux racines distinctes, A est diagonalisable (on applique ici le corollaire 2). La matrice diagonale est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$E_{\lambda_1}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\}. = Vect((2, 1))$$

$$E_{\lambda_2}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = Vect((1, 1)).$$

En posant $\vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (1, 1)$, $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A. La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(3) Soit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique : on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X)(4-X)^2.$$

Donc A possède deux valeurs propres : 2 de multiplicité algébrique 1 (on dit qu'elle est simple) et 4 de multiplicité algébrique 2 (on dit qu'elle est double). En plus P_A est scindé.

2. Sous-espaces propres : on a

$$E_2(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

$$E_4(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

En résolvant le système homogène $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, par la méthode de Gauss par exemple, on obtient

$$E_2(A) = Vect(\vec{u}), \text{ où } \vec{u} = (1, -2, 1).$$

De même

$$E_4(A) = Vect(\vec{v}, \vec{w}), \text{ où } \vec{v} = (0, 1, 0), \vec{w} = (1, 0, -1).$$

Donc la multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est 1 et celle de la valeur propre 4 est 2.

3. Diagonalisabilité : comme P_A est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre coïncide avec sa multiplicité géométrique, A est diagonalisable.
4. Diagonalisation : on a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ A = PDP^{-1}.$$

(4) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique : on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ -1 & 4-X & 1 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X)(4-X)^2.$$

Donc A possède deux valeurs propres : 2 de multiplicité algébrique 1 (on dit qu'elle est simple) et 4 de multiplicité algébrique 2 (on dit qu'elle est double). En plus P_A est scindé.

2. Sous-espaces propres : on a

$$E_2(A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

$$E_4(A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

En résolvant le système homogène $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, par la méthode de Gauss par exemple, on obtient

$$E_2(A) = Vect(\vec{u}), \text{ où } \vec{u} = (1, -2, 1).$$

De même

$$E_4(A) = Vect(\vec{v}), \text{ où } \vec{v} = (0, 1, 0).$$

Donc la multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est 1 et celle de la valeur propre 4 est aussi 1.

3. Diagonalisabilité : P_A est scindé mais la multiplicité algébrique de la valeur propre 4 ne coïncide pas avec sa multiplicité géométrique, donc A n'est pas diagonalisable.

VI. 7. Théorème de Cayley-Hamilton

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Si $f \in End(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par

$$P(f) = a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0 Id_E,$$

où $f^k = \underbrace{f \circ f}_{k-fois} \circ \cdots \circ f$.

De même si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, alors $P(A)$ est définie par

$$P(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I_m.$$

Théorème (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit $f \in End(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et $P_f(X)$ son polynôme caractéristique (resp. $P_A(X)$). Alors $P_f(f) = 0$ (resp. $P_A(A) = 0$).

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 4 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 8 = X^2 - 2X - 7.$$

D'après le théorème, on a

$$A^2 - 2A - 7I_2 = \text{ la matrice nulle.}$$

Cela permet par exemple de calculer A^2 en utilisant A et la matrice identité I_2.
On a aussi

$$A \cdot (\frac{1}{7}(A - 2I_2)) = I_2$$

et on déduit que $A^{-1} = \frac{1}{7}(A - 2I_2)$.

VI. 8. Trigonalisation

Définition 8

On dit d'un endomorphisme f qu'il est trigonalisable, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire inférieure

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ou triangulaire supérieure

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Traduction pour les matrices :

Définition 8 bis

Une matrice A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure).

Théorème

Une matrice (ou un endomorphisme) est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}[X]$.

Comme tout polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ est scindé, on déduit

Corollaire

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

V. Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

V. 1. Introduction

Nous avons vu que dans un espace vectoriel nous pouvons additionner des vecteurs et les multiplier par des scalaires.

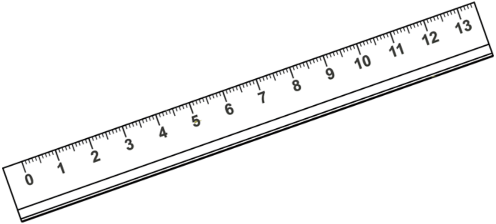
Pouvons-nous aller plus et définir des notions comme les longueurs, les angles et l'orthogonalité ?

Le produit scalaire est une opération algébrique qui s'ajoute aux lois s'appliquants aux vecteurs et qui permet donc d'utiliser les notions usuelles de la géométrie euclidienne traditionnelle en dimension deux ou trois, comme les longueurs, les angles et l'orthogonalité.

Il permet d'étendre ces notions à des espaces vectoriels réels de toute dimension, et aux espaces vectoriels complexes.

Nous distinguerons le cas réel et le cas complexe pour définir le produit scalaire.

V. 2. Produit scalaire



V. 2. 1. Produit scalaire réel

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée forme bilinéaire si :

- φ est linéaire à gauche : pour tout $\vec{b} \in E$ fixé, l'application $\varphi_{\vec{b}} : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{\vec{b}}(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{b})$ est linéaire :

$$\varphi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{b}) = \varphi(\vec{x}_1, \vec{b}) + \varphi(\vec{x}_2, \vec{b}),\ \text{pour tout } \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$$

$$\varphi(\lambda\vec{x}, \vec{b}) = \lambda\varphi(\vec{x}, \vec{b}),\ \text{pour tout } \vec{x} \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

- φ est linéaire à droite : pour tout $\vec{a} \in E$ fixé, l'application $\varphi_{\vec{a}} : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{\vec{a}}(\vec{y}) = \varphi(\vec{a}, \vec{y})$ est linéaire :

$$\varphi(\vec{a}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \varphi(\vec{a}, \vec{y}_1) + \varphi(\vec{a}, \vec{y}_2),\ \text{pour tout } \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in E$$

$$\varphi(\vec{a}, \lambda\vec{y}) = \lambda\varphi(\vec{a}, \vec{y}),\ \text{pour tout } \vec{y} \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Exemple

En prenant $E = \mathbb{R}$ l'application

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x, y) = xy$$

est une forme bilinéaire sur E. En effet :

- φ est linéaire à droite : pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = ay$ est évidemment linéaire.
- φ est linéaire à gauche : pour tout $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = xb$ est évidemment linéaire.

On remarque par contre que φ elle-même n'est pas linéaire (exercice).

Définition

Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est

- symétrique si $\varphi(\vec{x},\vec{y}) = \varphi(\vec{y},\vec{x})$ pour tout $\vec{x},\vec{y} \in E$.
- positive si $\varphi(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$ pour tout $\vec{x} \in E$.
- définie positive si elle est positive et si pour tout $\vec{x} \in E$,

$$\varphi(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

est une forme bilinéaire (exercice) symétrique et définie positive. En effet :

- φ est symétrique : on a

  $$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = \varphi((y_1, y_2), (x_1, x_2))$$

  et donc φ est symétrique.
- φ est définie positive : on a

  $$\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

  et $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0$ si et seulement si $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire sur E qui est symétrique et définie positive.

- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.
- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien.

Notation

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ est noté $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$.

Exemple : Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique, est défini par

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Exemple

Soit E le $\mathbb{R}$-e.v des applications continues de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application

$$E \times E \to \mathbb{R},\ (f, g) \to \langle f|g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

est un produit scalaire (exercice).

V. 2. 3. Produit scalaire complexe

Définition

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée forme sesquilinéaire sur E si :

- pour tout $\vec{b} \in E$ fixé, l'application $\varphi_{\vec{b}} : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{\vec{b}}(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{b})$ est linéaire :

$$\varphi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{b}) = \varphi(\vec{x}_1, \vec{b}) + \varphi(\vec{x}_2, \vec{b}), \text{ pour tout } \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$$

$$\varphi(\lambda\vec{x}, \vec{b}) = \lambda\varphi(\vec{x}, \vec{b}), \text{ pour tout } \vec{x} \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

- pour tout $\vec{a} \in E$ fixé, l'application $\varphi_{\vec{a}} : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{\vec{a}}(\vec{y}) = \varphi(\vec{a}, \vec{y})$ est semi-linéaire :

$$\varphi(\vec{a}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \varphi(\vec{a}, \vec{y}_1) + \varphi(\vec{a}, \vec{y}_2), \text{ pour tout } \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in E$$

$$\varphi(\vec{a}, \lambda\vec{y}) = \bar{\lambda}\varphi(\vec{a}, \vec{y}), \text{ pour tout } \vec{y} \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Exemple

En prenant $E = \mathbb{C}$ l'application

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \ \varphi(x, y) = x\overline{y}$$

est une forme sesquilinéaire sur E. En effet :

- pour tout $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = xb$ est linéaire.
- pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = a\overline{y}$ est semi-linéaire :

$$\varphi_a(y_1 + y_2) = a(\overline{y_1 + y_2}) = a\overline{y_1} + a\overline{y_2} = \varphi_a(y_1) + \varphi_a(y_2)$$
$$\varphi_a(\lambda y) = a\overline{\lambda y} = a\overline{\lambda}\overline{y} = \overline{\lambda}\varphi_a(y).$$

Définition

Une forme sesquilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est

- hermitienne si $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{\varphi(\vec{y}, \vec{x})}$, pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in E$.
- positive si $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ pour tout $\vec{x} \in E$.
- définie positive si elle est positive et si pour tout $\vec{x} \in E$,

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

Exemple

Dans $\mathbb{C}^2$, l'application

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$$

est une forme sesquilinéaire (exercice) hermitienne et définie positive. En effet :

- φ est hermitienne : on a

  $$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2}} = \overline{\varphi((y_1, y_2), (x_1, x_2))}$$

  et donc φ est hermitienne.
- φ est définie positive : on a

  $$\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0$$

  et $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$.

Définition

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute forme sesquilinéaire sur E qui est hermitienne et définie positive.

- Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.
- Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace hermitien.

Notation

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ est noté $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$.

Exemple : Produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$

Dans $\mathbb{C}^n$, le produit scalaire canonique, est défini par

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}.$$

Récapitulatif pour les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire sur E qui est symétrique et définie positive.
- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.
- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien.
- Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$: le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, est défini par

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Récapitulatif pour les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

- On appelle produit scalaire sur E toute forme sesquilinéaire sur E qui est hermitienne et définie positive.
- Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.
- Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace hermitien.
- Produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$: le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$, est défini par

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}.$$

V. 2. 4. Quelques propriétés

Rappel

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ est noté $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$.

Dans la suite E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel préhilbertien. Donc un espace vectoriel, réel ou complexe, muni d'un produit scalaire noté $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$.

Norme, distance

Définition

Pour tout $x \in E$, $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0$.

- On pose alors $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$ qu'on appelle la norme de $\vec{x}$.
- Pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in E$, on pose $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ qu'on appelle la distance entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x_1, x_2) | (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

on retombe sur la notion usuelle de distance

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{\langle (x_1 - y_1, x_2 - y_2) | (x_1 - y_1, x_2 - y_2) \rangle}$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Proposition

Pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

- $\|\vec{x}\| \geq 0$,
- $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$,
- $\|\vec{x}\| = 0$ si et seulement si $\vec{x} = 0$,
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Inégalité triangulaire),
- $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2Re(\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle) + \|\vec{y}\|^2$.

Proposition (Identité du parallélogramme)

Dans tout espace préhilbertien E, on a pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in E$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2).$$

(Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés).

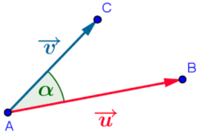
Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Dans tout espace préhilbertien E, on a pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in E$

$$\| \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

avec égalité si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement dépendants.

Angle



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de E. On sait d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\left|\frac{\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right| \leq 1$$

On peut donc trouver un unique angle $\alpha \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

Définition

Cet unique angle est appelé l'angle non orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

V. 3. Orthogonalité

Définition

- On dit que deux vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$ sont orthogonaux si $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$. On écrit $\vec{x} \perp \vec{y}$.
- Deux parties A et B de E sont dites orthogonales si pour tout $\vec{a} \in A$ et pour tout $\vec{b} \in B$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux. On écrit $A \perp B$.

Remarque

Remarquons que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux si et seulement si l'angle non orienté formé entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\pi/2$.

Définition

Soit $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien E. On dit que $\mathcal{C}$ est orthogonale si $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ avec $i \neq j$.

Théorème de Pythagore

Soit $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille orthogonale de vecteurs d'un espace préhilbertien E. Alors

$$\Big\| \sum_{i=1}^{p} \vec{u}_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|\vec{u}_i\|^2.$$

Proposition

Toute famille de vecteurs, ne contenant pas de vecteurs nuls, orthogonale est libre.

V. 4. Projection orthogonale