Chapitre 1: Algèbre Linéaire

IV. Déterminants

Définition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors le déterminant de A est la quantité

$$ad - bc.$$

On note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \times 2 - 1 \times 5 = 11.$$

Proposition & Définition

Supposons avoir défini le déterminants des matrices carrées $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ avec $m \leq n-1$. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Δ_{ij} le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Alors :

- (Développement suivant une colonne) : pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

- (Développement suivant une ligne) : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Développement suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Développement suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple

En développant suivant la première colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 30 + 0 = -33.$$

Propriétés

- $\det(I_n) = 1$ où I_n est la matrix identité de taille n.
- $\det({}^{t}A) = \det(A)$ où ${}^{t}A$ est la transposée de A.
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- Si A, B sont des matrices carrées de taille n, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Proposition 10

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
De plus,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t(\mathrm{com} A)$$

où com$A$ est une matrice dont le coefficient à la place i, j est égale à $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ (rappelons que Δ_{ij} est le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.)

Exemples

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

V. Systèmes d'équations linéaires

V. I. Introduction

Les systèmes linéaires interviennent dans diverses branches des mathématiques, ainsi que dans la résolution de nombreux problèmes issus des autres domaines, comme la physique, la mécanique, l'économie, le traitement du signal, ...

Ils peuvent être considérés comme la "base calculatoire" de l'algèbre linéaire. Ils sont au coeur du traitement d'une grande partie des problèmes issus de l'algèbre linéaire en dimension finie. Par exemple, ils permettent de déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire, de déterminer si une famille de vecteurs est libre ou non, ...

Exemples de la géométrie euclidienne

- Dans le plan (Oxy), l'équation d'une droite s'écrit

$$ax + by = c,$$

où a, b et c sont des réels.

- Considérons deux droites : $\mathcal{D}_1$ d'équation $ax + by = c$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation $dx + ey = f$. Alors un point (x, y) appartient à l'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, si et seulement si, il est solution du système linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Remarquons que trois cas se présentent :

  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'intersectent en un seul point : (S) a une unique solution
  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles : (S) n'a pas de solution
  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

Dans l'espace $(Oxyz)$, l'intersection de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est l'ensemble des solutions du système

$$(S) \ \left\{ \begin{array}{c} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{array} \right.$$

Trois cas se présentent :

- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en une droite : (S) a une infinité de solutions
- $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles : (S) n'a pas de solution
- $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

V. 2. Définitions, propriétés

On appelle système linéaire de n équations et à m inconnues $x_1, \ldots, x_m$, tout système de la forme

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{im}x_m & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

où $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

- Les nombres a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, sont les coefficients du système (S).
- Le n-uplet $(b_1, \ldots, b_n)$ est le second membre du système (S).

(1) La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ est appelée la matrice du système (S). Elle sera notée A_S.

(2) Si le second membre du système est nul, autrement dit $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, on dit que le système (S) est homogène.

Exemples

Exemples

(1) Pour $n = 1$, on obtient une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b.$$

(2) Équation d'une droite dans le plan : $ax + by = c$.

(3) Systèmes à 2 équations et 2 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{c} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right., \left\{\begin{array}{c} 2x + 3y = 4 \\ 9x + 6y = 3 \end{array}\right.$$

(4) Le système

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_1 = 1 \end{array}\right.$$

a comme second membre $(1, 1, 1)$.

Exemples

(1) Soit (S) le système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 = 10 \end{array} \right.$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$.
(2) Le système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 0 \end{array} \right.$$

est homogène.

V. 3. Écriture matricielle

Soit (S) un système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = b_i, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases}$$

$A = A_S = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ sa matrice et $(b_1, \ldots, b_n)$ son second membre. En posant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

on peut écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$A \cdot X = B.$$

Exemples

Exemple

Soit (S) le système

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 = 10. \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système

$$(S)\ \begin{cases} 2x+7y+5z=1, \\ 3x+2y-6z=11, \\ x-y+9z=0. \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 11, 0)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système

$$(S)\quad \begin{cases} 2x + 9y = 1, \\ 3x - 2y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 3, 1)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V. 4. Interprétation à l'aide d'une application linéaire

Soient $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ munis respectivement des bases canoniques.

Soit (S) un système linéaire de n équations et m inconnues de matrice A.

Alors on peut associer canoniquement une application linéaire f à (S) définie sur $\mathbb{K}^m$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$: c'est l'application linéaire associée à A (relativement aux bases canoniques)

$$f(x_1, \ldots, x_m) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

En posant $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, (S) est équivalent à

$$f(\vec{x}) = \vec{b}.$$

V. 5. Ensemble des solutions

Définition

Soit (S) un système linéaire de n équations et à m inconnues.

- Une solution de (S) est un m-uplet $(s_1, \dots, s_m)$ tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, $\cdots$, s_n pour x_n, dans (S) on obtient une égalité.
- L'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble de toutes les solutions de (S).
- On dit que (S) est compatible si (S) admet des solutions.

Proposition 1

Soit (S) un système linéaire homogène de n équations à m inconnues. L'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.

Preuve

En utilisant l'application linéaire f associée à (S), on a

$$(s_1, \ldots, s_m) \text{ est une solution de } (S) \text{ si et seulement si } f(s_1, \ldots, s_m) = \vec{0}$$

$$\text{si et seulement si } (s_1, \ldots, s_m) \in Ker(f).$$

Donc l'ensemble des solutions de (S) est le noyau de f. Comme ce dernier est un $\mathbb{K}$-e.v., il en est de même de l'ensemble des solutions de (S). $\square$

Proposition 2

Soit (S) un système linéaire de n équations à m inconnues. Si $\vec{s}$ est une solution particulière de (S), alors l'ensemble des solutions de (S) est

$$\vec{s} + Ker(f) = \{\vec{s} + \vec{h} \mid \vec{h} \in Ker(f)\},$$

où f est l'application linéaire associée à (S).

Preuve

Soit $\vec{x}$ une solution de (S). Alors $f(\vec{x}) = \vec{b}$, où $\vec{b}$ est le vecteur représenté par le second membre de (S). On a

$$f(\vec{x} - \vec{s}) = f(\vec{x}) - f(\vec{s}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

et donc $\vec{x} - \vec{s} \in Ker(f)$. D'où $\vec{x} = \vec{s} + (\vec{x} - \vec{s}) \in \vec{s} + Ker(f)$. Inversement, si $\vec{x} = \vec{s} + \vec{h}$, avec $\vec{h} \in Ker(f)$, alors $f(\vec{x}) = f(\vec{s} + \vec{h}) = \vec{b} + f(\vec{h}) = \vec{b}$ et donc $\vec{x}$ est solution de (S). $\square$

Proposition 3

Tout système d'équations linéaires possède ou bien une seul solution, ou bien une infinité de solutions,ou bien aucune solutions.
En particulier, tout système d'équations linéaires homogène possède ou bien une seul solution, ou bien une infinité de solutions.

Preuve

Soit $f(\vec{x}) = \vec{b}$ l'interprétation à l'aide d'une application linéaire de (S). Un des cas suivants se présentent :

- $\vec{b} \notin Im(f)$: (S) n'a pas de solutions (dans le cas où le système est homogène $\vec{b} = \vec{0}$ est toujours dans $Im(f)$).
- $\vec{b} \in Im(f)$ et $Kerf(f) = \{\vec{0}\}$: (S) a une unique solution.
- $\vec{b} \in Im(f)$ et $Kerf(f) \neq \{\vec{0}\}$: (S) a une infinité de solutions.

$\square$

V. 6. Existence des solutions

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle rang de la matrice A la dimension du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{K}^m$) engendré par ses vecteurs colonnes.

Propriété

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est égal au rang de l'application linéaire qui lui est associée. En effet, si f est l'application linéaire associée à A

$$rg(f) = \dim(Im(f)) = \dim(Vect(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_m)))$$

or on vérifie que

$$f(\vec{e}_i) = A \cdot \vec{e}_i = \text{ la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

Définition

- Soit A une matrice de type (m, n). On appelle matrice extraite de A, toute matrice obtenue en supprimant un certain nombre de lignes et un certain nombre de colonnes de A.
- On appelle déterminant extrait de A, tout déterminant d'une matrice carrée extraite de A.

Théorème (Calcul pratique du rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est le plus grand entier r tel que l'on puisse extraire de A au moins une matrice carrée inversible de type (r, r). $\square$

Exemples

(1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est $\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible ; d'où $rg(A) = 3$.

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Donc on ne peut pas extraire une matrice d'ordre 3 inversible. Par contre la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ extraite de A possède un déterminant non nul ; d'où $rg(A) = 2$.

Définition

Soit (S) un système de n équations à m inconnues de matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$ et de second membre $\vec{b}$.

- Le rang de (S) est par définition le rang de sa matrice :

$$rg(S) = rg(A).$$

- La matrice augmentée de (S) est la matrice, notée $[A|\vec{b}]$, définie par :

$$[A|\vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Remarque

Pour bien distinguer le second membre $\vec{b}$ de A et pour des raisons pratiques de calculs, on écrit $[A|\vec{b}]$ sous la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Exemple

Considérons le système

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + 7y + 5z = 1, \\ 3x + 2y - 6z = 11, \\ x - y + 9z = 0. \end{cases}$$

Alors la matrice du système (S) est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 11, 0)$. Donc $[A|\vec{b}]$ est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 11 \\ 1 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Proposition (CNS pour l'existence des solutions)

Soit (S) un système d'équations linéaires, de matrice A et de second membre $\vec{b}$. Alors (S) est compatible, si et seulement si, $rg(A) = rg([A|\vec{b}])$.

Exemple

Soit

$$(S) \quad \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2y+3z=0 \\ 3y+2z=1 \end{cases}$$

Alors la matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est $\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible ; d'où $rg(A) = 3$. La matrice augmentée de (S) est $[A|\vec{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Son rang ne peut être 4 et comme A est une matrice extraite de rang 3 ; $\mathrm{rg}([A|\vec{b}]) = 3$. Donc (S) est compatible (admet des solutions).

V. 7. Méthodes de résolution

Exemple

Soit

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + 3z = 4 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires directement sur la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 - L_1 \to L_3]{L_2 - L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{2L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 + \frac{3}{2}L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{9}L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

Exemple continue

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2-5L_3\to L_2]{L_1-\frac{1}{2}L_3\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1-\frac{1}{2}L_2\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

Exemple continue

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

Le système devient

$$\begin{cases} x = -5/9 \\ y = 8/9 \\ z = 11/9 \end{cases}$$

et la solution, dans ce cas, est évidente.