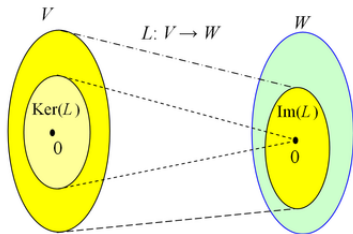


Chapitre 1: Algèbre Linéaire

II. 2. Image et noyau



Rappel

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- L'image directe par f d'une partie $A \subseteq E$ est :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

- L'image réciproque d'une partie $B \subseteq F$ est :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Proposition 8

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- Si H est un s.e.v de E , alors $f(H)$ est un s.e.v de F .
- Si G est un s.e.v de F , alors $f^{-1}(G)$ est un s.e.v de E .

Définition 9

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

On appelle :

- **Image de f** , le s.e.v de F :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in E\}$$

- **Noyau de f** , le s.e.v de E :

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

Exemples



Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors f est linéaire (Exercice). On a $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. En effet :

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0 \text{ et } x + y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x - y = a \text{ et } x + y = b \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2} \text{ et } y = \frac{b-a}{2}.$

Proposition 10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est injective ;
- $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$;

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est surjective ;
- $\text{Im}(f)=F$.

Définition 10

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La dimension de $\text{Im}(f)$ est appelée le **rang de f** et est notée $\text{rg}(f)$.



Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On a

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

III. Matrices



On appelle **matrice** à n lignes et m colonnes, à coefficients dans \mathbb{K} , un tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} sont des scalaires (des éléments de \mathbb{K}).

On note

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m},$$

a_{ij} est le coefficient : intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Exemples



Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 25 & 1+i \\ 21 & 11 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice à coefficients dans \mathbb{R} (mais dans \mathbb{C} aussi); B est une matrice à coefficients dans \mathbb{C} .

Définition 1

On dit que M est une matrice

- **colonne** si elle a une seule colonne ($m = 1$).
- **ligne** si elle a une seule ligne ($n = 1$).
- **carrée** si elle a le même nombre de lignes que de colonnes ($n = m$).

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}; B = (i \ 3 \ 5); C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée

B est une matrice ligne

C est une matrice colonne

Remarques & notations

- Une matrice à n lignes et m colonnes est aussi appelée matrice de type (n, m) ou encore matrice $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$.

Remarques & notations

- La **matrice identité** $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice **carrée** dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients valent 0.

Exemple :

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice **nulle** $O_{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Exemple :

$$O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III. 2. Opérations sur les matrices

Définition 2

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

On définit la **somme** $A + B$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Remarque

On ne somme que des matrices de même type.

Définition 3

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

On définit la matrice λA , une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$$
$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemples

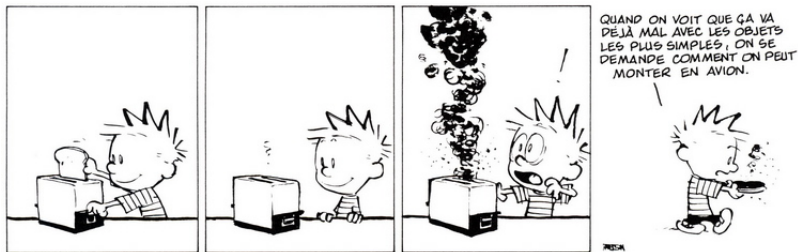
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}; \pi B = \begin{pmatrix} 5\pi & 6\pi \\ 7\pi & 8\pi \end{pmatrix}$$

Proposition 1

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices $(A, B) \mapsto A + B$ et de la multiplication par des scalaires $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \times m$.

Le vecteur nul de cet espace est la matrice nulle $O_{n,m}$.



Exemple & exercice

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ on considère la famille $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que \mathcal{B} est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Définition 4 (Produit de deux matrices)

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$ une matrice $p \times m$.

Le **produit** de A et B est la matrice $n \times m$, notée $A \cdot B$, dont les coefficients c_{ij} sont définis par : c_{ij} est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6) = (32).$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 2 \\ 3 \times 0 + 4 \times 1 & 3 \times 2 + 4 \times 2 \\ 5 \times 0 + 6 \times 1 & 5 \times 2 + 6 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 14 \\ 6 & 22 \end{pmatrix}$$

Remarques

- (1) Pour que le produit de A par B ait un sens il faut que le nombre de colonnes de A soit le même que le nombre de lignes de B .
- (2) Le produit d'une matrice de type (n, p) par une matrice de type (p, m) est une matrice de type (n, m) .

Remarques

(1) On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve qu'en général $A \cdot B \neq B \cdot A$ et $A \cdot B = O$ n'implique pas forcément $A = O$ ou $B = O$ (O désigne la matrice nulle).

(2) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a (exercice)

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Propriétés

Les propriétés suivantes sont vraies sous hypothèse que les produits considérés ont un sens :

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.

Notations & conventions

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ fois}}.$$

III. 3. Matrice des composantes et matrice de passage

Définition 5

Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie n et soit $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E . Soit $\vec{u} \in E$ ayant comme composantes dans la base \mathcal{B} , $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. (Donc $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$).

On appelle **matrice des composantes du vecteur \vec{u} dans la base \mathcal{B}** , la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

On écrit

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Définition 5 (suite)

Plus généralement, soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle **matrice des composantes de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ dans la base \mathcal{B}** , la matrice $n \times m$ dont les colonnes sont $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1), \dots, M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_m)$. Elle est notée $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$.

Exemples



Exemple

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de \mathbb{R}^n . Alors

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Définition 6

Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie n . Soient $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ deux bases de E .

On appelle **matrice de passage** de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B}_2 , la matrice carrée $n \times n$, $M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$. Elle est souvent notée $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$.

Donc c'est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des composantes de \vec{f}_j dans la base \mathcal{B}_1 .

C'est donc la matrice carrée $n \times n$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\vec{f}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + \dots + a_{nj}\vec{e}_n.$$

Proposition 2

Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie et soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de E .
Alors pour tout $\vec{u} \in E$

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{u}) = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \cdot M_{\mathcal{B}_2}(\vec{u}).$$

Exemples



Exemple

Dans \mathbb{R}^2 considérons les deux bases $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$ où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons la matrice $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$. Les composantes de \vec{w} et \vec{r} dans \mathcal{B}_1 sont (exercice)

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}, \vec{r} = -\vec{u} + \vec{v}.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}_1}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent : $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$, $\mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On avait trouvé

$$P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{f} = \vec{w} + \vec{r}$ et calculons ses composantes dans la base \mathcal{B}_1 . On a

$$M_{\mathcal{B}_2}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

III. 4. Matrice d'une application linéaire

Définition 7

Soient E et F des \mathbb{K} -e.v munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

On appelle **matrice de f** , par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} , la matrice

$$M_{\mathcal{C}}(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)).$$

Elle est notée **$M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$** .

Exemples



Exemple

On munit \mathbb{R}^3 de la base canonique, notée ici $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et \mathbb{R}^2 de la base canonique, notée ici $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y).$$

On a

$$f(\vec{u}_1) = (1, 1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad f(\vec{u}_2) = (2, -1) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2,$$

$$f(\vec{u}_3) = (-1, 0) = -\vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 3

Soient E et F des \mathbb{K} -e.v (de dimension finie) munis respectivement des bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors pour tout $\vec{u} \in E$

$$M_{\mathcal{C}}(f(\vec{u})) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}(\vec{u}).$$

Remarque

Autrement dit, si Y désigne la matrice colonne des composantes de $f(\vec{u})$ dans la base \mathcal{C} et X désigne la matrice colonne des composantes de \vec{u} dans la base \mathcal{B} , alors

$$Y = AX, \quad \text{où } A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f).$$

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, par rapport aux bases canoniques,

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y), \quad M_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{pmatrix} x + 2y - z \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Définition 7

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v de dimension respectives n et m . Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)$ une base de F .

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. **L'application linéaire associée à A** , relative aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} , est l'application définie par : au vecteur $\vec{u} \in E$ de composantes (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} , elle associe le vecteur \vec{v} dont les composantes (y_1, \dots, y_m) dans la base \mathcal{C} sont données par

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemples



Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire associée à A , relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 , $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est

$$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit E (respectivement F) un \mathbb{K} -e.v de dimension finie n (respectivement m), muni d'une base \mathcal{B} (respectivement \mathcal{C}). L'application

$$\mathcal{M} : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}); f \mapsto \mathcal{M}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

est un isomorphisme de \mathbb{K} -e.v.



Remarque

Donc fondamentalement en dimension finie, une fois que les bases sont fixées, il n'existe pas de différence réelle entre applications linéaires et matrices.

Proposition 4

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -e.v de dimension finie, munis respectivement des bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f).$$

III. 5. Matrices inversibles

Définition 8

Une matrice **carrée** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Cette matrice est alors unique, est appelée **l'inverse** de A et est notée A^{-1} .

Exemple

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

et donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Proposition 5

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A et B sont inversibles, il en est de même de $A \cdot B$ et on a

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Quelques résultats utiles



Proposition 6

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v de dimension finie, \mathcal{B}_1 une base de E et \mathcal{B}_2 une base de F . Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est **bijective** si et seulement si $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$ est **inversible**.

On a alors

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)^{-1} = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f^{-1}).$$

Exemples



Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Sa matrice par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^2 est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(x, y) = (a, b) \text{ si et seulement si } x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{b-a}{2}$$

et donc $f^{-1}(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 7

Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie n muni d'une base \mathcal{B} . Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une **base** de E si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est **inversible**.

Exemples



Exemple

Soit $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \vec{u}_2 = \vec{e}_1, \vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$. La famille \mathcal{B} est une base pour \mathbb{R}^3 car

$$M_{\mathcal{C}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible (Exercice).}$$

Corollaire 8

Si \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases d'un \mathbb{K} -e.v de dimension finie, alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}$; autrement dit

$$P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}^{-1} = P_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}.$$

Proposition 9

Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie et soit f un endomorphisme de E . Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux bases de E . Alors

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}.$$

IV. Déterminants

Définition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors le **déterminant** de A est la quantité

$$ad - bc.$$

On note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \times 2 - 1 \times 5 = 11.$$

Proposition & Définition

Supposons avoir défini le déterminants des matrices carrées $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ avec $m \leq n - 1$. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Δ_{ij} le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Alors :

- (Développement suivant une colonne) : pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

- (Développement suivant une ligne) : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Développement suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} .$$

Développement suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple

En développant suivant la première colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 30 + 0 = -33.$$