

Notions sur les équations aux dérivées partielles

Pour étudier les phénomènes réels, on utilise les lois de la physique : mécanique, électromagnétisme, acoustiques, thermodynamiques, quantiques, relativistes, etc.

Cette étude se traduit généralement par une modélisation mathématique par des équations différentielles ordinaires ou par des *équations aux dérivées partielles*.

Définition 1

Soit $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h},$$

existe et finie, on l'appelle la **i -ième dérivée partielle de f** au point $(a_1, \dots, a_n) \in D$ et on la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$.

Si pour tout $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$, f admet une i -ième dérivée partielle au point \mathbf{a} , l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i}: \mathbf{a} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$ est appelée la **i -ième dérivée partielle de f** (ou souvent la dérivée partielle par rapport à la variable x_i).

Exemple 1

Considérons la fonction $f(x, y) = xy$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)b - ab}{h} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b+h - ab}{h} = a.$$

Remarque

Dans la pratique, pour calculer une dérivée partielle par rapport à la variable x_j , on fixe les autres variables et on calcule la dérivée au sens usuel où la variable est x_j . Dans l'exemple précédent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (xy)' \text{ (où } y \text{ est considérée comme une constante)} = y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (xy)' \text{ (où } x \text{ est considérée comme une constante)} = x.$$

Définition 2

Soit $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si toutes les dérivées partielles de f existent en un point $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$, alors on appelle **gradient de f au point \mathbf{a}** le vecteur

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \right)$$

Exemple 1 (suite)

On a

$$\nabla f(a, b) = (b, a) .$$

Définition 3

La **dérivée partielle de f d'ordre j** par rapport aux variables x_{i_1}, \dots, x_{i_j} est définie par

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}} \right).$$

Exemple 2

Considérons la fonction $f(x, y) = x^4 + y^3$. Alors, les dérivées d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

Définition 4

Le **Laplacien** d'une fonction $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) .$$

Une **équation aux dérivées partielles** (EDP en abrégé) est une relation entre une fonction de plusieurs variables $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et ses dérivées partielles :

$$(E) \quad F\left(\mathbf{x}, u, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}\right) = 0$$

où m est le degré de l'équation.

Le problème est posé sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$. On cherche des applications $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E) et satisfaisant des **conditions initiales** et des **conditions sur le bord** ∂D .

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est

$$(E) \quad \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta u = f ,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \zeta$ sont des constantes et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est une application appelée le second membre de l'équation.

On dit que l'équation (E) est :

- *elliptique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$,
- *parabolique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$,
- *hyperbolique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

Exemples

- L'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est hyperbolique.
- L'équation de Laplace $\Delta u = 0$ ou Poisson $\Delta u = f$ est elliptique.
- L'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est parabolique ($c > 0$).

La propagation d'une onde sur une corde infinie est modélisée par l'équation des ondes sur \mathbb{R}

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (\text{EO1})$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale.

Théorème 1 (Formule de D'Alembert)

La solution de l'équation des ondes (EO1) où on suppose que u_1 est une fonction différentiable est

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(u_0(x + ct) + u_0(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy .$$

On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde sur une demi-corde (infinie). Elle est modélisée par l'équation des ondes avec une condition de frontière :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x > 0, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, & \forall t > 0, \end{cases} \quad (\text{EO2})$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale. Physiquement, la condition de frontière s'interprète comme une paroi réfléchissante.

Équation des ondes : conditions aux limites et formule de D'Alembert

Théorème 1 (Formule de D'Alembert)

La solution de l'équation des ondes (EO2) où on suppose que u_1 est une fonction différentiable est

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(u_0(x + ct) + u_0(ct - x) \right) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} u_1(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^{ct-x} u_1(y) dy .$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

On cherche les solutions à **variables séparées** de l'équation des ondes. On suppose qu'il existe des fonctions F et G telles que

$$u(x, t) = F(x) G(t) .$$

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG'' , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

et en remplaçant dans l'équation, on obtient

$$FG'' = c^2 F''G .$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

En supposant en plus que $F(x) \neq 0$ et $G(t) \neq 0$, on obtient

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)} .$$

Comme la fonction de gauche dépend uniquement de x et celle de droite uniquement de t , il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda, \quad \frac{G''(t)}{G(t)} = \lambda .$$

Donc on obtient les équations différentielles linéaires ordinaires suivantes :

$$\begin{aligned} c^2 F''(x) - \lambda F(x) &= 0 , \\ G''(t) - \lambda G(t) &= 0 . \end{aligned}$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

On distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors

$$F(x) = ax + b, \quad G(t) = \alpha t + \beta .$$

- si $\lambda > 0$, alors

$$F(x) = ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}, \quad G(t) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t} .$$

- si $\lambda < 0$, alors

$$F(x) = a \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + b \sin\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right),$$

$$G(t) = a \cos(\sqrt{-\lambda}t) + b \sin(\sqrt{-\lambda}t) .$$

En tenant compte des conditions initiales et des conditions aux limites, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

Équation des ondes : séries de Fourier

On cherche les solutions L -périodiques de l'équations des ondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) = u(x + L, t), & \end{cases} \quad (\text{EO3})$$

où on suppose que les fonctions u_0 et u_1 sont périodiques et admettent un développement en séries de Fourier ($\omega = \frac{2\pi}{L}$)

$$u_0(x) = \frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_{0,n} \cos(n\omega x) + b_{0,n} \sin(n\omega x))$$

$$u_1(x) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_{1,n} \cos(n\omega x) + b_{1,n} \sin(n\omega x))$$

Supposons que la solution $u(x, t)$ est développable en séries de Fourier

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(t) \cos(n\omega x) + b_n(t) \sin(n\omega x)) .$$

En dérivant terme à terme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n''(t) \cos(n\omega x) + b_n''(t) \sin(n\omega x)) ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\sum_{n \geq 1} -(n\omega)^2 (a_n(t) \cos(n\omega x) + b_n(t) \sin(n\omega x)) \right) .$$

Par identification, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$a_0''(t) = 0, \quad a_0(0) = a_{0,0}, \quad a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \quad a_n(0) = a_{0,n}, \quad a_n'(0) = a_{1,n},$$

$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \quad b_n(0) = b_{0,n}, \quad b_n'(0) = b_{1,n},$$

où $\lambda_n = cn\omega$.

En résolvant les équations différentielles ordinaires précédentes, on obtient

$$a_0(t) = a_{1,0}t + a_{0,0},$$

$$a_n(t) = a_{0,n} \cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t),$$

$$b_n(t) = b_{0,n} \cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t),$$

et donc la solution $u(x, t)$.

Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes, avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2[, \end{cases}$$

et $u_1(x) = 0$ (en toute rigueur u_0 est définie sur \mathbb{R} , est 2-périodique et coïncide avec u_0 sur $[0, 2]$).

Équation de Laplace, Équation de Poisson

On considère l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0 ,$$

et l'équation de Poisson

$$\Delta u = \rho .$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

On cherche des solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

à variables séparées. On suppose donc qu'il existe deux fonctions $F(x)$ et $G(y)$ telles que

$$u(x, y) = F(x)G(y).$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

et il existe donc une constante λ telle que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda = -\frac{G''(y)}{G(y)}.$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

Comme dans le cas des équations des ondes, on distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors

$$F(x) = ax + b, \quad G(y) = \alpha y + \beta.$$

- si $\lambda > 0$, alors

$$F(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad G(y) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}y) + \beta \sin(-\sqrt{\lambda}y).$$

- si $\lambda < 0$, alors

$$F(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(\sqrt{-\lambda}x),$$

$$G(y) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}y} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}y}.$$

En tenant compte des conditions initiales, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

On s'intéresse à l'équation de la chaleur avec une condition initiale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (\text{EC1})$$

et l'équation de la chaleur avec une condition au bord

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x > 0, \forall t > 0, \\ u(0, t) = u_0(t), & \forall t > 0, \end{cases} \quad (\text{EC2})$$

Grâce aux séries de Fourier . . .

Théorème 3

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue 2π -périodique. Alors il existe une unique solution u de (EC1) vérifiant

- pour tout $t > 0$, $u(x, t)$ est 2π -périodique comme fonction en x ,
- la dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$,
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$.

Théorème 4

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue 2π -périodique. Alors il existe une unique solution u de (EC2) vérifiant

- pour tout $x > 0$, $u(x, t)$ est 2π -périodique comme fonction en t ,
- la dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{t > 0} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$.

Équation des ondes : séries de Fourier

On considère l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants avec second membre

$$ay'' + by' + cy = f \quad (\text{E})$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application. On lui associe l'équation homogène (sans second membre)

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (\text{EH})$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (EH) est un espace vectoriel de dimension 2.

Pour résoudre l'équation (E), on calcule une solution particulière y_0 de (E) et on résout l'équation homogène associée (EH).

Si y_{EH} est la solution générale de (EH) alors la solution générale de (E) est

$$y_E = y_{EH} + y_0 .$$

Pour résoudre l'équation homogène (EH) on associe l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (\text{EC})$$

avec la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si la discriminant $\Delta > 0$ alors (EC) admet deux solutions réelles r_1, r_2 . Dans ce cas les fonctions

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique (EC) admet une racine réelle double r . Dans ce cas les fonctions

$$xe^{rx}, e^{rx}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{rx} x + C_2 e^{rx}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique (EC) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$. Dans ce cas les fonctions

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes

$$(EO) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) = u(x + 2, t), \end{cases}$$

avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2], \end{cases}$$

et $u_1(x) = 0$.

On cherche d'abord les développements en série de Fourier des fonctions u_0 et u_1 . Comme u_1 est identiquement nulle son développement en série de Fourier est nul.

On calcule donc le développement en série de Fourier de u_0 (en toute rigueur celui de la fonction \bar{u}_0 paire définie sur \mathbb{R} , 2-périodique et qui coïncide avec u_0 sur $[0, 2]$).

La fonction étant paire on a $b_n = 0$ et donc on calcule a_n . On a ($T = 2 = \frac{2\pi}{\omega}$)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u_0(x) dx = \int_0^2 u_0(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$

$$a_n = \int_0^2 u_0(x) \cos(n\pi x) dx = \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx + \int_1^2 (2-x) \cos(n\pi x) dx$$

Par une IPP

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx &= \left[\frac{x \sin(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $t = 2 - x$

$$\int_1^2 (2 - x) \cos(n\pi x) dx = \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}.$$

D'où

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2}.$$

La série de Fourier de u_0 est

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x).$$

Comme \bar{u}_0 est continue et dérivable par morceau, on a d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in [0, 2]$

$$u_0(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x)$$

et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé et borné.

Soit $u(x, t)$ une solution de (EO) 2-périodique développable en série de Fourier

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(t) \cos(n\omega x) + b_n(t) \sin(n\omega x)).$$

En dérivant terme à terme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n''(t) \cos(n\omega x) + b_n''(t) \sin(n\omega x)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n \geq 1} (-(n\omega)^2 a_n(t) \cos(n\omega x) - (n\omega)^2 b_n(t) \sin(n\omega x)).$$

En reprenant les notations du cours précédent, par identification, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$a_0''(t) = 0, \quad a_0(0) = a_{0,0}, \quad a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \quad a_n(0) = a_{0,n}, \quad a_n'(0) = a_{1,n},$$

$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \quad b_n(0) = b_{0,n}, \quad b_n'(0) = b_{1,n},$$

où $\lambda_n = cn\omega$.

Comme $\omega = \pi$ et avec ce qui précède, on obtient

$$(1) \quad a_0''(t) = 0, \quad a_0(0) = 1, \quad a_0'(0) = 0$$

$$(2) \quad a_n''(t) + (cn\pi)^2 a_n(t) = 0, \quad a_n(0) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}, \quad a_n'(0) = 0$$

$$(3) \quad b_n''(t) + (cn\pi)^2 b_n(t) = 0, \quad b_n(0) = 0, \quad b_n'(0) = 0$$

La résolution de l'équation (1) donne

$$a_0(t) = 1 .$$

L'équation (2) est une équation linéaire homogène du second ordre et son équation caractéristique est $r^2 + (cn\pi)^2 = 0$ dont les solutions sont $r = \pm icn\pi$. La solution générale est donc

$$a_n(t) = C_1 \cos(cn\pi t) + C_2 \sin(cn\pi t).$$

Les conditions initiales donnent

$$a_n(0) = C_1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}, \quad a'_n(0) = C_2 cn\pi = 0.$$

D'où

$$a_n(t) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(cn\pi t).$$

La résolution de (3) donne immédiatement $b_n(t) = 0$.

D'où finalement la solution recherchée est

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \right) \cos(cn\pi t) \cos(n\pi x) .$$