Chapitre 2: Suites et séries numériques et de fonctions

Mathématiques 3, 2018

II. Suites et séries de fonctions

II.2. Séries de fonctions

De la même manière qu'on avait défini les séries numériques à partir des suites numériques, on définit les **séries de fonctions** à partir des suites de fonctions.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Donc on s'intéresse à la somme

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

Si x est fixé, la suite $\big(f_n(x)\big)_n$ est une suite numérique et donc on peut étudier la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Définition 1

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions (réelle ou complexe). On appelle série de fonctions de terme général f_n et on note $\sum f_n$, la suite de fonctions $(S_n)_n$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \quad n \in \mathbb{N} .$$

On appelle S_n la la somme partielle d'ordre n de la série $\sum f_n$.

Remarque

On a

$$S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x) .$$

Convergence simple

Définition 2 (Convergence simple)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur D. On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur D si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge simplement sur D.

D'une manière équivalente : la série $\sum f_n$ converge simplement sur D si pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.

Notation. Si $\sum f_n$ converge simplement sur D vers la fonction S, on note

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x) \ .$$

Convergence simple

Exemple 1

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum f_n$.
Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left|\frac{\sin(nx)}{3^n}\right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} \; .$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente (c'est une série géométrique convergente), on déduit que la série numérique $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est absolument convergente.
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : séries géométriques

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. La suite $(f_n(z))_n$ est une suite géométrique de raison z et on a

$$S_n = \begin{cases} S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1, \\ n+1 & \text{si } z = 1. \end{cases}$$

La série $\sum f_n(z)$ converge si et seulement si $|z| < 1$.

Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Dans ce cas, on peut calculer sa limite simple :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} .$$

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur D. On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur D si la suite de fonctions des sommes partielles $(S_n)_n$ converge uniformément sur D.

Remarque 1

Toute série de fonctions qui converge uniformément sur D converge simplement sur D.

Convergence uniforme

Exemple 2 : séries géométriques

Reprenons $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. Sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, on a

$$S_n(z) - S(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{-z^{n+1}}{1 - z},$$

et donc $\left|S_n(z) - S(z)\right| = \dfrac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} \leq \dfrac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||}$.

Comme $\displaystyle\lim_{|z| \to 1} \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} = +\infty$, la série $\displaystyle\sum f_n(z)$ ne converge pas uniformément sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Exemple 2 : séries géométriques

En revanche, elle converge uniformément sur tout disque de la forme $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ où $0 \leq r < 1$. En effet,

$$\left|S_n(z) - S(z)\right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} \leq \frac{r^{n+1}}{|1 - r|}$$

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{r^{n+1}}{|1 - r|} = 0$, on déduit la convergence uniforme.

Convergence uniforme et reste partiel

Définition 4

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers S. On appelle suite des restes partiels, la suite $(R_n)_n$ de fonctions définie par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \ .$$

R_n est appelé le reste d'ordre n.

Remarque

Remarquons que $(R_n)_n$ est bien définie et que pour tout $x \in D$,

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

et donc en particulier $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.

Convergence uniforme et reste partiel

Proposition 2

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur D. Alors elle converge uniformément sur D si et seulement si la suite des restes partiels $(R_n)_n$ converge uniformément sur D vers la fonction nulle.

Convergence uniforme et reste partiel

Le critère précédent est particulièrement utile lorsqu'on peut majorer le reste d'ordre n. C'est le cas, par exemple, des séries alternées.

Exemple 3

Soit $\sum f_n$ la série de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la série numérique $\sum u_n(x)$ de terme général $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée qui satisfait les conditions de la règle des séries alternées : $|u_n(x)|$ est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.
Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Convergence uniforme et reste partiel

Exemple 3

Comme $\sum u_n(x)$ satisfait les conditions de la règle des séries alternées, nous avons la majoration

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$|R_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n+1} \,.$$

On déduit la convergence uniforme de $(R_n)_n$ vers 0.
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Convergence normale

Soit $f : D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ une application bornée. On note

$$\|f\| := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

qu'on appelle la norme de la convergence uniforme de f.

Remarquons que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Convergence normale

Définition 5

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

On dit que $\sum f_n$ converge absolument sur D si la série de fonctions $\sum |f_n|$ est simplement convergente sur D.

On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur D si la série numérique à termes positifs $\sum \|f_n\|$ est convergente.

Convergence normale

Remarques

- Pour montrer qu'il y a convergence normale, on cherche à majorer $\|f_n\|$ par un réel u_n tel que $\sum u_n$ soit convergente.
- Pour montrer qu'il n'y a pas convergence normale, on cherche à minorer $\|f_n\|$ par un réel u_n tel que $\sum u_n$ soit divergente.

Exemple 1 (suite)

Reprenons $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{3^n}. \end{array} \right.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\frac{\sin(nx)}{3^n}\right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

et donc

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{3^n} \ .$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente, on déduit que la série de fonctions $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est normalement convergente.

Liens entre les différentes formes de convergence

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Convergence absolue} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Convergence normale} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Convergence simple} \\
 & \text{Convergence uniforme} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Liens entre les différentes formes de convergence

Remarque

La convergence uniforme n'entraine pas la convergence absolue.
Reprenons la série $\sum f_n$ de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n} \end{cases}.$$

Nous avons vu qu'elle est uniformément convergente. Mais elle n'est pas absolument convergente. En effet,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x+n} \sim \frac{1}{n}$$

et la série $\sum \frac{1}{n}$ n'est pas convergente et donc $\sum |f_n|$ n'est pas convergente.

Proposition 3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

- Si $\sum f_n$ converge simplement, alors $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge normalement, alors $(\|f_n\|)_n$ converge vers 0.

Convergence et continuité

Comme les séries est un cas particulier des suites de fonctions ...

Théorème 1

Si une séries de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur D vers une fonction S et si chaque f_n est continue sur D, alors S est continue sur D.

Plus précisément, si $\sum f_n$ **converge uniformément** sur D vers S et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors S est continue en x_0.
On a

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) .$$

Convergence et intégrales

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$. Supposons que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction S.
Alors

- S est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt, \;\; F(x) = \int_a^x S(t)\, dt \;,$$

  la série $\sum F_n$ converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

On a, en particulier

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \Big)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_a^b f_n(t)\, dt \Big) \;.$$

Convergence et dérivées

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

- que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge.

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.
Ce qu'on peut formuler

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t) .$$

Si chaque f_n est de classe C^1, il en est de même de f.

Exercice récapitulatif

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^3x^2} \end{array} \right. .$$

(1) Soit $a > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $D_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Y-a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$?

(2) Soit S la limite de la série. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.

(3) Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et écrire S' comme la somme d'une série.

(4) Montrer que S est Riemann-Intégrable sur $[1, 2]$ et écrire $\displaystyle\int_1^2 S(x)\, dx$ comme la somme d'une série.

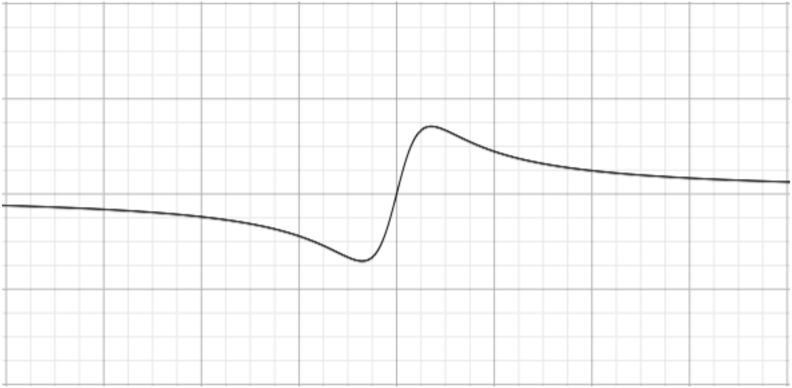
Corrigé

(1) On a $f_n'(x) = \dfrac{n\,(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2}$,

$$\begin{cases} f_n'(x) = 0 & \text{ssi } x = \pm\frac{1}{\sqrt{n^3}} \\ f_n'(x) \leq 0 & \text{ssi } |x| \geq \frac{1}{\sqrt{n^3}} \\ f_n'(x) \geq 0 & \text{ssi } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}. \end{cases}$$

Donc

$$f_n \text{ est } \begin{cases} \text{décroissante sur} &]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[\,, \\ \text{croissante sur} & [-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}]\,. \end{cases}$$



Pour n assez grand,

$$[-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}] \subseteq [-a, a], \ \|f_n\|_D = \sup_{D_a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{na}{1+n^3a^2} \sim \frac{1}{an^2}.$$

Donc la série converge normalement sur D_a.

Sur $\mathbb{R}$, on a

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{\sqrt{n^3}}) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \ .$$

La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. On déduit que la série $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$ et $0 < a < x_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en x_0. La série $\sum f_n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. En conclu que sa limite S est continue en x_0.

(3) Pour pouvoir appliquer le théorème de la dérivation des séries, on étudie la convergence uniforme de la série $\sum f_n'$. On a

$$f_n'(x) = \frac{n\,(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2} \, .$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < 0$ ou $0 < a < b$. On a, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\|f_n'(x)\| \leq \frac{n\,(1 + n^3b)}{(1 + n^3a^2)^2}, \text{ si } 0 < a < b,$$

$$\|f_n'(x)\| \leq \frac{n\,(1 + n^3|a|)}{(1 + n^3|b|^2)^2}, \text{ si } a < b < 0.$$

Or

$$\frac{n\,(1+n^3\alpha)}{(1+n^3\beta^2)^2} \sim \frac{\alpha}{\beta^4 n^2}$$

et donc la série $\sum f_n'$ est uniformément convergente sur $[a,b]$.
Comme $\sum f_n$ est normalement convergente, elle est simplement convergente et donc il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ est convergente.
Par conséquent, S est dérivable sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}\ .$$

(4) La série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[1,2]$ et donc S est Riemann-Intégrable sur $[1,2]$. On a

$$\int_1^2 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2n^2} \ln\big(\frac{1+4n^3}{1+n^3}\big)\,,$$

et donc

$$\int_1^2 S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \ln\big(\frac{1+4n^3}{1+n^3}\big)\,.$$

III. Séries entières

Définition 1

Une série entière est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où $(a_n)_n$ est une suite réelle ou complexe.

Exemple 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)\, z^n$$

Théorème 1

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels ou de complexes. Alors il existe un unique réel $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ possédant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

De plus

$$R = \sup\Big\{ r \geq 0 \ \Big| \ \text{la suite } (|a_n|\, r^n)_n \text{ est majorée} \Big\} .$$

Remarque

Pour les $z \in \mathbb{C}$, tels que $|z| = R$, on ne peut rien conclure de général sur la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Il faut étudier le cas $|z| = R$ en

Rayon de convergence

Définition 2

- Le réel $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini dans le théorème précédent est appelé le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.
- Le disque ouvert $\mathring{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé le disque de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

Exemple 2

Considérons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n .$$

Nous avons vu que si $|z| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge et si $|z| > 1$, elle diverge.
Donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ est 1.

Remarquons que pour $|z| = 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ diverge.

Rayon de convergence : règle de D'Alembert

Proposition 2 (Règle de D'Alembert)

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. Supposons que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} .$$

Alors le rayon de convergence est donné par

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ avec les conventions } \frac{1}{0} = +\infty \text{ et } \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Exemple 3

Considérons la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\,.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

et donc le rayon de convergence est $+\infty$.

L'application

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est appelée l'exponentielle complexe et est notée $\exp(z)$ ou e^z.

Proposition 3 (Règle de Cauchy)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Alors $R = \frac{1}{\ell}$, avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Rayon de convergence : règle de Cauchy

Exemple 4

Considérons la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}.$$

On a

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

et donc le rayon de convergence est $+\infty$.

Propriétés fonctionnelles

Proposition 1

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- Pour tout $0 < r < R$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque (fermé) $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.
- Sur $\mathring{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, en supposant $(a_n)_n$ réelle, la somme

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ ,$$

est indéfiniment dérivable et pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{\infty} n\,(n-1)\cdots(n-p+1)\,a_n x^{n-p}.$$

De même ...

Proposition 2

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R où $(a_n)_n$ est réelle. Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $[a, b] \subseteq]-R, R[$,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx \, .$$

Un exemple d'application

Considérons l'équation différentielle

$$y' - y = 0 \,. \tag{E}$$

On connait l'ensemble des solutions

$$y(x) = C \exp(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

On va retrouver l'ensemble des solutions en utilisant les séries entières.

Un exemple d'application

Soit y une solution de (E) et supposons que y est la somme d'une série entière

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ ,$$

de rayon de convergence $R > 0$.
Par ce qui précède, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ .$$

Un exemple d'application

En remplaçant dans (E)

$$y'(x) - y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \; .$$

Une réindexation nous donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+1)\, a_{n'+1} x^{n'} \; ,$$

et comme n' est une "variable muette"

$$\sum_{n'=0}^{\infty} (n'+1)\, a_{n'+1} x^{n'} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^{n} \; .$$

Un exemple d'application

On obtient donc

$$
\begin{aligned}
y'(x) - y(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)\, a_{n+1} - a_n \right) x^n = 0 \,,
\end{aligned}
$$

et on déduit

$$(n+1)\, a_{n+1} - a_n = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Un exemple d'application

Et donc la formule de récurrence

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Par récurrence sur n,

$$a_n = \frac{a_0}{n!}$$

et donc

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = a_0 \exp(x) .$$

Développement d'une fonction en série entière

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, où $(a_n)_n$ est réelle, et S sa somme

$$S : I =]-R, R[\to \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \; .$$

Nous avons vu que S est indéfiniment dérivable (de classe C^∞) sur I. De plus

$$S(0) = a_0, \; S'(0) = a_1, \; S''(0) = 2a_2,$$

$$S^{(p)}(0) = \sum_{n \geq p} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)a_n 0^{n-p} = p! a_p$$

et donc, on peut exprimer a_n en fonction de $S^{(n)}(0)$

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \; .$$

Définition 1

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est développable en série entière autour de 0, s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, où $(a_n)_n$ est réelle, de rayon de convergence R non nul et $r \in]0, R[$ vérifiant

$$(1)\ \ ]-r, r[\subseteq I, \qquad (2)\ \ \forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\ .$$

La série entière $\sum a_n x^n$ est appelée le développement en série entière de f autour de 0.

Définition 2

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est développable en série entière autour de x_0 si la fonction $x \mapsto f(x - x_0)$ est développable en série entière autour de 0.

Conséquence

Si f est développable en série entière autour de 0, alors f est de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} .$$

Et donc, sur un voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Développement d'une fonction en série entière

Conséquence

De même, si f est développable en série entière autour de x_0, alors f est de classe C^∞ sur un voisinage de x_0 et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Et donc, sur un voisinage de x_0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

En particulier le développement en série entière est unique.

Remarque

Toute fonction développable en série entière autour de 0 est de classe C^∞ sur un voisinage de 0. Mais la réciproque est fausse. Il existe des fonctions de classe C^∞ sur un voisinage de 0 qui ne sont pas développables en série entière autour de 0.

Exemple : l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{-1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, en particulier autour de 0, et pour laquelle la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

est la fonction nulle.

Définition 3

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, où I est un intervalle qui est un voisinage de x_0. On appelle série de Taylor-Maclaurin de f autour de x_0, la série

$$\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \, .$$

Remarque

La série de Taylor-Maclaurin n'est pas forcément convergente. Comme signalé plus haut, il peut arriver que sa somme ne coïncide pas avec f.

Proposition 1 (Condition suffisante)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, où I est un intervalle qui est un voisinage de x_0.

Supposons que f est de classe C^∞ sur I et qu'il existe une constante M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M \, .$$

Alors f est développable en série entière autour de x_0 et donc sur un voisinage de x_0, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \, .$$

Démonstration.

Soit $\epsilon > 0$ avec $J = [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subseteq I$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à f entre x_0 et $x \in J$ à l'ordre m. Donc il existe $c_m \in [x_0, x]$ tel que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(m+1)}(c_m)}{(m+1)!}(x - x_0)^m \ .$$

D'où

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{n=m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right| \leq \frac{M}{(m+1)!}\epsilon^m.$$

Comme le dernier terme tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$, on déduit que la série $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ converge uniformément vers f sur J. On vérifie bien que la convergence est normale et donc absolue et par conséquent le rayon de convergence $\geq \epsilon$. $\square$

Exemple 1

Considérons la fonction exponentielle $f(x) = \exp(x)$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. On a

$$f^{(n)}(x) = \exp(x), \quad f^{(n)}(x) \leq \exp(x_0 + \epsilon) \text{ pour tout } x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \, .$$

Donc f est développable en série entière autour de x_0 et

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\exp(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \, .$$

En variant ϵ, on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\exp(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \, .$$

Développement d'une fonction en série entière

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $I =]-1, 1[$ par

$$f(x) = \ln(1 + x) .$$

Alors f est de classe C^∞ sur I et

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} .$$

On a pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n .$$

Exemple 2

Par intégration, on obtient

$$\int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^t (-1)^n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}\;.$$

Donc pour tout $x \in I$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

ce qui est le développement en série entière de $\ln(1+x)$ autour de 0.

Exemple d'applications aux équations différentielles

Considérons l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' + y = 4\cos(\sqrt{x})\ .$$

Supposons que (E) admet une solution y développable en série entière $\sum a_n x^n$, autour de 0, de rayon de convergence $R > 0$. On a alors sur $]-R, R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

et en replaçant dans (E)

$$xy'(x) + y(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exemple d'applications aux équations différentielles

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^n \ .$$

On a

$$4\cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n)!} x^n.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_n - \frac{4(-1)^n}{(2n)!}) x^n = 0$$

et par unicité d'un développement en série entière, on déduit que y est solution de (E) si et seulement si

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{(n+1)(2n)!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple d'applications aux équations différentielles

Donc la solution recherchée est

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{(n+1)(2n)!} x^n \ .$$

En utilisant la règle de D'Alembert, on montre que le rayon de convergence est $R = +\infty$ et donc la solution obtenue est définie sur $\mathbb{R}$.