II. Suites et séries de fonctions

II.1. Suites de fonctions

Une **suite de fonctions** est la donnée d'une suite

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappel

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

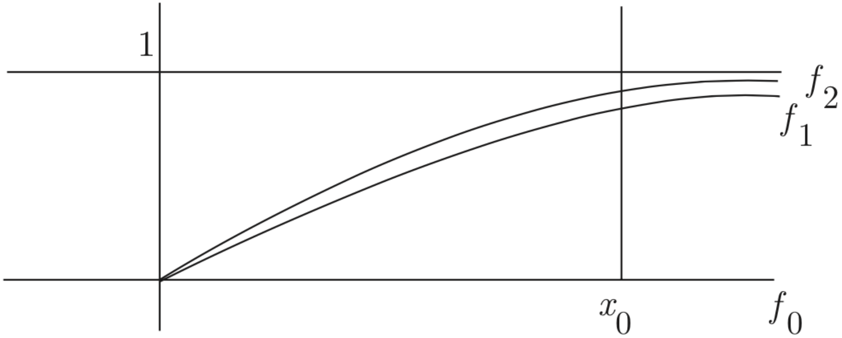
Soit $D \subseteq \mathbb{K}$. Une suite de fonctions de D dans $\mathbb{K}$ est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une application $f_n \colon D \mapsto \mathbb{K}$.

Notation. On notera $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(f_n)_n$ ou (f_n) la suite de fonctions.

Exemple 1

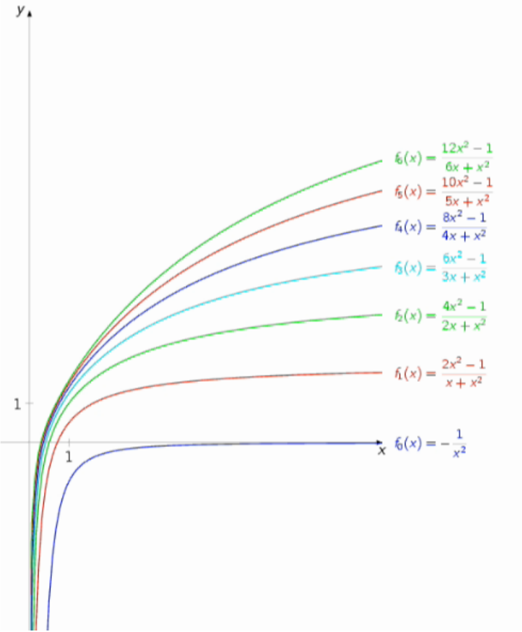
Soit $D = [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$, on pose

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx} \ .$$



Exemple 2

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \frac{2nx^2-1}{nx+x^2}. \end{array} \right.$$



y
1
1
x
$f_6(x) = \frac{12x^2 - 1}{6x + x^2}$
$f_5(x) = \frac{10x^2 - 1}{5x + x^2}$
$f_4(x) = \frac{8x^2 - 1}{4x + x^2}$
$f_3(x) = \frac{6x^2 - 1}{3x + x^2}$
$f_2(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + x^2}$
$f_1(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + x^2}$
$f_0(x) = -\frac{1}{x^2}$

Exemple 3

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \cos(nx). \end{array} \right.$$

Exemple 4

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = x^n. \end{array} \right.$$

Convergence

Pour les suites de fonctions, on dispose de plusieurs formes de convergence.

On commence par la plus simple. . .

Convergence simple

On a vu qu'une suite numérique peut converger (ou non) vers une limite finie ℓ. De la même manière, on peut étudier la converge d'une suite de fonctions et voir si elle peut *s'approcher (converger)* (ou non) d'une fonction "limite".

Soit $x_0 \in D$ fixé. Alors la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique dont on peut étudier la convergence.

Si pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors on peut définir une *fonction limite* f par

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} D & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x). \end{array} \right.$$

Convergence simple

Définition 2

Soient $D \subseteq \mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que (f_n) converge simplement sur D, si pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Si (f_n) converge simplement sur D, alors la fonction f définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} D & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \qquad f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

est appelée la limite simple de la suite (f_n) sur D.

Convergence simple

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} [0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{cases}$$

On a :

- pour $x \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+nx} = 1$,
- pour $x = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Donc (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par

$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Convergence simple

Exemple 2 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases}]0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \qquad f_n(x) = \dfrac{2nx^2-1}{nx+x^2}. \end{cases}$$

On a, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2nx^2-1}{nx+x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n(x^2-\frac{1}{2n})}{n(x+\frac{x^2}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(x^2-\frac{1}{2n})}{(x+\frac{x^2}{n})} = 2x^2/x = 2x.$$

Donc (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = 2x.$$

Exemple 4 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = x^n. \end{array} \right.$$

- Si $|x| < 1$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.
- Si $x = 1$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$.
- Si $|x| > 1$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, donc $(f_n(x))_n$ diverge.
- Si $x = -1$, $f_n(x) = (-1)^n$ et donc $(f_n(x))_n$ n'admet pas de limite.

Donc $(f_n)_n$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Convergence simple

Remarque

En général, la convergence simple dépend du domaine de définition D de la suite (f_n).

Dans l'exemple précédent, (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$. En revanche, elle converge simplement sur l'intervalle $I =]-1, 1]$ et admet comme limite (simple) l'application f définie par

$$f :]-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Convergence uniforme

Supposons que $(f_n)_n$ est une suite de fonctions définies de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. Donc on suppose qu'il y a déjà une convergence simple.

Dans beaucoup d'applications, on aimerait savoir si une propriété qui est satisfaite pour toutes les fonctions f_n, serait aussi satisfaite par f.
On peut se demander si :

- la continuité de chaque f_n entraîne-t-elle la continuité de f ?
- chaque f_n est dérivable, f est-elle dérivable et a-t-on $f' = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'$?
- chaque f_n est intégrable, f est-elle intégrable et a-t-on alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t)\, dt$?

La convergence simple n'est pas suffisante. Il nous faut une notion plus forte, qui est la **convergence uniforme**.

Convergence uniforme

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge simplement sur D vers la fonction f. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément sur D vers f si :

- la quantité $u_n = \sup_{x \in D}(|f_n(x) - f(x)|)$ existe et finie pour n assez grand,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0.$

En pratique ...

Proposition 1

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur D vers f, si et seulement si, il existe une suite réelle $(u_n)_n$ vérifiant :

- pour n assez grand : $\forall x \in D, \ |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Convergence uniforme

Remarque

Pour montrer la convergence uniforme de $(f_n)_n$, il faut après avoir trouvé la limite simple f, essayer de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ en fonction seulement de n, indépendamment de x.

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} [0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{cases}$$

On a vu que $(f_n)_n$ converge simplement vers f qui est définie par

$$f : D = [0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour tout $x > 0$, $|f_n(x) - f(x)| = |\dfrac{nx}{1+nx} - 1| = \dfrac{1}{1+nx}$ et $|f_n(0) - f(0)| = 0$.

On a $u_n = \sup\limits_{x \in D} \dfrac{1}{1+nx} = 1$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Donc $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur D.

Exemple 1 (suite)

En revanche, (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $D = [a, +\infty[$ où $a > 0$.

En effet, pour tout $x \in D$,

$$a \leq x \Rightarrow 1 + na \leq 1 + nx \Rightarrow \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na},$$

donc en posant $u_n = \dfrac{1}{1+na}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n,$$

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, on déduit le résultat.

Exemple 2 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{2nx^2 - 1}{nx + x^2}. \end{cases}$$

On a vu que (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$. On a $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1 + 2x^3}{nx + x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1 + 2x^3}{nx + x^2} \sim_{+\infty} 2x$$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$.
Donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D.

Exemple 2 (suite)

En revanche, (f_n) converge uniformément vers f, sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ où $0 < a < b < +\infty$.
En effet, on a

$$\frac{1+2a^3}{nb+b^2} \leq \frac{1+2x^3}{nx+x^2} \leq \frac{1+2b^3}{na+a^2},$$

donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n = \frac{1+2b^3}{na+a^2}$$

et comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, on déduit le résultat.

Convergence et continuité

Théorème 1

Si une suite de fonctions (f_n) **converge uniformément** sur D vers une fonction f et si chaque f_n est continue sur D, alors f est continue sur D.

Plus précisément, si (f_n) **converge uniformément** sur D vers f et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors f est continue en x_0 et on a

$$\lim_{x \to x_0} \big(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \big) = \lim_{n \to +\infty} \big(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \big).$$

Convergence et continuité

Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple). Reprenons la suite

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

dont la limite simple est $f : D = [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$

Chaque f_n est continue sur D (en particulier en 0), alors que f n'est pas continue en 0.

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$ et **convergeant uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f.

Alors

- f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt\ ,$$

  la suite $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

En particulier

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt\ .$$

Exemple 1 (suite)

Reprenons la suite (où $a > 0$)

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

dont la limite uniforme est $f : D = [a, +\infty[\to \mathbb{R}, \;\; f(x) = 1.$
Sur $[a, 1]$ on a

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt = (x-a) - \frac{\ln(1+nx)}{n} + \frac{\ln(1+na)}{n}, \;\; F(x) = x - a,$$

et on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n = F$ uniformément.

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose :

- que la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge.

Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

En particulier, si chaque f_n est de classe C^1, il en est de même de f.