CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU 2

(Mercredi 9 novembre 2016)

Durée : 1 heure

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. (4 pts)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in End(E)$ un endomorphisme de E. Donner la définition de la diagonalisabilité de f. (1 pt)

   Un endomorphisme $f \in End(E)$ est diagonalisable, si et seulement si, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale.

2. Parmi les matrices suivantes, déterminer, en justifiant (mais sans calcul !), celles qui sont diagonalisables dans une base orthonormée (par rapport au produit scalaire usuel considéré) :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

   (2 pts)

   Une matrice réelle est diagonalisable dans une base orthonormée, si et seulement si, elle est symétrique ; et une matrice complexe est diagonalisable dans une base orthonormée, si et seulement si, elle est hermitienne.

   La matrice A n'est pas symétrique et donc elle n'est pas diagonalisable dans une base orthonormée. De même pour la matrice C. Quant à la matrice B, elle est symétrique et est donc diagonalisable dans une base orthonormée. La matrice D est hermicienne et est donc diagonalisable dans une base orthonromée (par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^2$).

3. Parmi les applications suivantes, déterminer, sans justifier, celles qui sont des formes quadratiques

   (a) $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q_1(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^3$, (b) $q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q_2(x,y) = x^2 + 2y^2$,

   (c) $q_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q_3(x,y,z) = x^2 + \pi y^2 - y + yz$, (d) $q_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q_4(x,y,z) = x^2$.

   (1 pt)

   Toute forme quadratique $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de la forme

$$q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

et toute forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *est de la forme*

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + exy + fyz + gxz$$

où a,b,c,d,e,f,g *sont des constantes réelles. Par conséquent, (b) et (d) sont des formes quadratiques et (a) et (c) ne le sont pas.*

Exercice 1. (6 pts) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x - y - z = 0$.

1. Donner une base de F. (1 pt)

   Soit $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *On a*

$$\vec{u} \in F \text{ ssi } x = y + z \text{ ssi } \begin{cases} x = y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

   D'où

$$(x,y,z) = (y+z,y,z) = y(1,1,0) + z(1,0,1)$$

   et

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = (y+z,y,z) = y(1,1,0) + z(1,0,1)\}.$$

   Donc F *est engendré par les vecteurs* $\vec{u}_0 = (1,1,0)$ *et* $\vec{v}_0 = (1,0,1)$. *La famille* $\mathcal{B}_0 = (\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ *constitue une base de* F.

2. Déterminer une base orthonormée de F.

   On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}_0$ *pour obtenir une base orthonormée. On pose*

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}_0}{\|\vec{u}_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0).$$

   et

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_0 - \langle \vec{v}_0 | \vec{u} \rangle \vec{u}}{\|\vec{v}_0 - \langle \vec{v}_0 | \vec{u} \rangle \vec{u}\|}.$$

   On a

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 - \langle \vec{v}_0 \mid \vec{u} \rangle \vec{u} &= (1,0,1) - (1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \times 0) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \\ &= (1,0,1) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1) \end{aligned}$$

   et donc

$$\|\vec{v}_0 - \langle \vec{v}_0 \mid \vec{u} \rangle \vec{u}\| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \vec{v} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}).$$

   Finalement la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ *est une base orthonormée de* F.

   (3 pts)

3. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{v} = (1, 1, 1)$ sur F.

Renommons $\vec{v}$ en $\vec{w} = (1, 1, 1)$. Comme la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de F, la projection de $\vec{w}$ sur F est donnée par

$$p_F(\vec{w}) = \langle \vec{w}|\vec{u}\rangle \vec{u} + \langle \vec{w}|\vec{v}\rangle \vec{v}$$

et donc

$$p_F(\vec{w}) = (1\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1\times 0)\times\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)+(1\times\frac{1}{\sqrt{6}}+1\times\frac{-1}{\sqrt{6}}+1\times\sqrt{\frac{2}{3}})\times(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{3})$$

$$= (1, 1, 0) + (\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Exercice 2. (10 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne usuelle. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(\vec{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_3 + x_2x_3), \quad \text{pour tout } \vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons qu'en pratique, pour calculer la matrice A, il est inutile de calculer la forme polaire φ_q et $\varphi_q(e_i, e_j)$. Pour retrouver la valeur de $\varphi_q(e_i, e_j)$ il faut se rapeller que c'est le coefficient du terme x_i^2 si $i = j$ et c'est le coefficient du terme x_ix_j divisé par 2 si $i \neq j$ (Voir le cours et la relation entre les coefficients du terme x_ix_j et $\varphi_q(e_i, e_j)$). Donc on a

$$q(x_1, x_2, x_3) = \varphi_q(e_1, e_1)x_1^2 + \varphi_q(e_2, e_2)x_2^2 + \varphi_q(e_3, e_3)x_3^2$$

$$+2\varphi_q(e_1, e_2)x_1x_2 + 2\varphi_q(e_1, e_3)x_1x_3 + 2\varphi_q(e_2, e_3)x_2x_3.$$

Donc (qui est une matrice symétrique)

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_q(e_1, e_1) & \varphi_q(e_1, e_2) & \varphi_q(e_1, e_3) \\ \varphi_q(e_1, e_2) & \varphi_q(e_2, e_2) & \varphi_q(e_2, e_3) \\ \varphi_q(e_1, e_3) & \varphi_q(e_2, e_3) & \varphi_q(e_3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les valeurs propres de A.

On commence par calculer le polynôme caractéristique de A

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1-X & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)[(1-X)^2-1]-(1-X) = (1-X)[(1-X)^2-2].$$

Donc $P_A(X)=0$ *ssi* $X=1$ *ou* $(1-X)=\pm\sqrt{2}$ *ssi* $X=1$ *ou* $X=1+\sqrt{2}$ *ou* $X=1-\sqrt{2}$*. Donc les valeurs propres de* A *sont* 1, $1+\sqrt{2}$ *et* $1-\sqrt{2}$*, chacune est de multiplicité algébrique* 1*.*

3. Déterminer une base orthonormée (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A.

On a

$$\vec{u} \in E_1(A) \text{ ssi } \begin{cases} x+z=x \\ y+z=y \\ x+y+z=z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} z=0 \\ x=-y \end{cases}$$

Donc, en posant $y=\alpha$ *comme paramètre*

$$(x,y,z)=\alpha(-1,1,0).$$

Donc $E_1(A)$ *est engendré par le vecteur* $\vec{u}_1=(-1,1,0)$*. La famille* $\mathcal{B}_1=(\vec{u}_1)$ *constitue une base de* $E_1(A)$ *et la dimension de* $E_1(A)$ *est donc* 1*. Pour avoir une base orthonormée, on prend*

$$\vec{v}_1=\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0).$$

On a

$$\vec{u} \in E_{1+\sqrt{2}}(A) \text{ ssi } \begin{cases} x+z=(1+\sqrt{2})x \\ y+z=(1+\sqrt{2})y \\ x+y+z=(1+\sqrt{2})z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} z=\sqrt{2}x \\ z=\sqrt{2}y \end{cases}$$

Donc $x=y$ *et en posant* $y=\alpha$ *comme paramètre*

$$(x,y,z)=\alpha(1,1,\sqrt{2}).$$

Donc $E_{1+\sqrt{2}}(A)$ *est engendré par le vecteur* $\vec{u}_2=(1,1,\sqrt{2})$*. La famille* $\mathcal{B}_2=(\vec{u}_2)$ *constitue une base de* $E_{1+\sqrt{2}}(A)$ *et la dimension est donc* 1*. Pour avoir une base orthonormée, on prend*

$$\vec{v}_2=\frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}=\frac{1}{2}(1,1,\sqrt{2}).$$

On a

$$\vec{u} \in E_{1-\sqrt{2}}(A) \text{ ssi } \begin{cases} x+z=(1-\sqrt{2})x \\ y+z=(1-\sqrt{2})y \\ x+y+z=(1-\sqrt{2})z \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} z=-\sqrt{2}x \\ z=-\sqrt{2}y \end{cases}$$

Donc $x=y$ *et en posant* $y=\alpha$ *comme paramètre*

$$(x,y,z)=\alpha(1,1,-\sqrt{2}).$$

Donc $E_{1-\sqrt{2}}(A)$ est engendré par le vecteur $\vec{u}_3 = (1, 1, -\sqrt{2})$. La famille $\mathcal{B}_3 = (\vec{u}_3)$ constitue une base de $E_{1-\sqrt{2}}(A)$ et la dimension est donc 1. Pour avoir une base orthonormée, on prend

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|} = \frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2}).$$

4. Expliciter une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A et une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice orthogonale P vérifiant $A = PDD^{-1}$. (2 pts)

   La famille $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ constitue une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A dans laquelle A est représentée par la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

   La matrice P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

   et on a donc $A = PDP^{-1}$.

5. Donner l'expression de q dans la base $\mathcal{B}$. La forme polaire φ_q de q définit-elle un produit scalaire ? (2 pts)

   La matrice D est la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$. On a pour tout $\vec{u} = x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2 + x'_3\vec{v}_3$

$$q(x'_1, x'_2, x'_3) = x'^2_1 + (1+\sqrt{2})x'^2_2 + (1-\sqrt{2})x'^2_2$$

   qui est l'expression de q dans la base $\mathcal{B}$. Comme les coefficients (donc les valeurs propres de A) ne sont pas tous strictement positifs ($1 - \sqrt{2} < 0$), q n'est pas définie positive. Par conséquent, φ_q ne définit pas un produit scalaire.

6. Quelle est la signature et quel est le rang de q ? (1 pt)

   La signature de q est (r, s) où r est le nombre des valeurs propres strictement positives et s est le nombre des valeurs propres strictement négatives. Donc $(r, s) = (2, 1)$. Le rang de q est $r + s = 3$.