Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 - UE Math 3

Corrigé du contrôle final – Mercredi 10 Janvier 2018

Durée 2h

Réglement – Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il est permis de consulter une feuille de notes personnelles A4 recto-verso.

Exercice 1 [7=0.5+1+1.5+1+1.5+1.5 points] – Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x,y,z) = (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 3z, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3z, 3z)$

1. L'application f est-elle linéaire ?
2. Montrer que la matrice A de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ s'écrit
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
La matrice A est-elle symétrique ?
3. Calculer $det\ A$ et déterminer le noyau $\ker\ A$
4. Calculer les valeurs propres de A
5. Déterminer les espaces propres de A
6. Donner une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $D = P^{-1}AP$.

Rép.– 1) oui
2) En effet
$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
La matrice A n'est pas symtrique.
3) On a $det\ A = 0$ et
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y,\ z = 0$$

Ainsi $ker\ A = vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = vect\ (e_1 + e_2)$

4) On a $det\ (A - \lambda Id) = \lambda(\lambda+1)(3-\lambda)$. Les valeurs propres sont donc 0, -1 et 3.
5) On a $E_0 = ker\ A$, $E_{-1} = vect\ (e_1 - e_2)$ et $E_3 = vect\ (e_1 + e_2 + e_3)$
6) On a

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 [3 points = 0.5+1.5+1] –

Quelle est la nature des séries numériques suivantes ?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{-n}+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

On rappelle que $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \simeq 2.718$.

Rép.– 1) Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{-n}+1} = 1$, la série diverge grossièrement.
2) La série est à termes positifs. Soit $u_n = \frac{n^n}{n!}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n!}\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (1+\frac{1}{n})^n$$

Ce quotient a pour limite e. Comme cette limite est > 1, on en déduit par la règle de d'Alembert que la série diverge grossièrement.
3) La série est à termes positifs. Soit $u_n = \frac{n}{e^n}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{e^{n+1}}\frac{e^n}{n} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{e}$$

Ce quotient a pour limite e^{-1}. Comme cette limite est < 1, on en déduit par la règle de d'Alembert que la série converge.

Exercice 3 [5=1+2+2 points]

1. a) Calculer le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n$

   b) Étudier sa convergence en $x = \pm R$.

2. Pour tout $x \in]-R, R[$ on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)2^{n+1}x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Montrer que $f(x) = 8x^2g''(2x) + 4xg'(2x) + 2g(2x)$.

3. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n$ (on rappelle que $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$)

Rép.– 1)a) Posons $a_n = (n^2+1)2^{n+1}$. On a

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{((n+1)^2+1)2^{n+2}}{(n^2+1)2^{n+1}} = 2\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}$$

Ce quotient a pour limite $\ell = 2$, on en déduit par la règle de d'Alembert que le rayon de convergence est $R = \ell^{-1} = \frac{1}{2}$.
b) Pour $x = \frac{1}{2}$ on pose $u_n = a_n x^n = 2(n^2+1)$. On remarque que $u_n \geq 2$ et que par conséquent la suite (u_n) ne converge pas vers zéro. La série numérique $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente et la série entière ne converge donc pas en $x = \frac{1}{2}$. On constate de même que pour $x = -\frac{1}{2}$, on a $u_n = a_n x^n = (-1)^n 2(n^2+1)$, $|u_n| \geq 2$ et donc la suite (u_n) ne converge pas vers zéro. Ceci implique que la série entière ne converge pas en $x = -\frac{1}{2}$.
2) Notons $h(x) = 8x^2g''(2x) + 4xg'(2x) + 2g(2x)$. On a

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad \text{et} \quad g''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
h(x) &= 8x^2g''(2x) + 4xg'(2x) + 2g(2x) \\
&= 2^3x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(2x)^{n-2} + 2^2x\sum_{n=1}^{\infty} n(2x)^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)2^{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n2^{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)2^{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n2^{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

3) Puisque $g(x) = (1-x)^{-1}$, on déduit $g'(x) = (1-x)^{-2}$ et $g''(x) = 2(1-x)^{-3}$ d'où

$$f(x) = 16x^2(1-2x)^{-3} + 4x(1-2x)^{-2} + 2(1-2x)^{-1}$$

Exercice 4 [5 = 1+2+1+1 points]

Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = -2$ si $-\pi < x \leq 0$ et $f(x) = 2$ si $0 < x \leq \pi$.

1. Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.
2. a) Écrire la série de Fourier Sf associée à f.
   b) Étudier sa convergence sur $]-\pi, \pi[$.
3. En déduire la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
4. En appliquant l'égalite de Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2 dx$$

   calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Rép.– 1) La fonction est impaire
2) a) Les coefficients a_n de la série de Fourier de f sont nuls. Ceci peut se constater soit par le calcul, soit en remarquant que f est impaire sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Pour les coefficients b_n, on a

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

d'où

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin(nx)dx = \frac{4}{\pi}[-\frac{\cos(nx)}{n}]_0^{\pi} = -\frac{4}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

Par conséquent $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \frac{8}{(2n+1)\pi}$. Au bilan

$$Sf(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

b) La fonction f satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet. L'application de ce théorème montre que $Sf(x) = f(x)$ sur $]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ et que $Sf(0) = 0$.
3) On a

$$Sf(\frac{\pi}{2}) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Or $Sf(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 2$ d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4) On a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 4dx = 8$$

ainsi, l''égalite de Parseval s'écrit

$$8 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^2}{(2n+1)^2\pi^2}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$