Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L2 - UE Math 3**

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 1 – Mercredi 25 octobre 2017

Règlement – L'épreuve dure 1 heure. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 [5 points] – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A [1 point]
2. Déterminer l'inverse A^{-1} de A. [4 points]

Rép.– Le déterminant de A vaut 1 et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 [10 points] – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^3. [1 point]
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. [4 points]
3. Donner une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $D = P^{-1}AP$. [1 points]
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. [4 points]

Rép.– On a

$$A^3 = \begin{pmatrix} 13 & 28 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont 3 et -1 et $E_3 = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{-1} = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ainsi $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Enfin $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n) & 3^n - (-1)^n \\ \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n) & \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n) \end{pmatrix}$.

Exercice 3 [5 points] – 1) Soient

$$E_1 = \{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid u = \sin x, v = \cos x,\ x \in \mathbb{R}\}$$

$$E_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 4\}$$

$$E_3 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \text{ et } 3x - 2y + z = 0\}$$

L'ensemble E_1 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? Les ensembles E_2 et E_3 sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? On justifiera chaque réponse. [3 point]

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (x+y, x^2+y^2)$ et

$$E_4 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = (0,0)\}$$

L'application f est-elle linéaire ? L'ensemble E_4 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? Les réponses seront justifiées. [2 points]

Rép.– Les ensembles E_1 et E_2 ne sont pas des sev car ils ne contiennent pas $\overrightarrow{0}$, E_3 est un sev car c'est le noyau de $g(x,y,z) = (x-2y+3z, 3x-2y+z)$. L'application f n'est pas linéaire mais $E_3 = \{(0,0)\}$ est un sev.