

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 1 – Mercredi 25 octobre 2017

Durée 1h

Règlement – Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 [5 points] – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A [1 point]
2. Déterminer l'inverse A^{-1} de A . [4 points]

Exercice 2 [10 points] – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^3 . [1 point]
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A . [4 points]
3. Donner une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $D = P^{-1}AP$. [1 point]
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. [4 points]

Exercice 3 [5 points] – 1) Soient

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid u = \sin x, v = \cos x, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 4 \right\}$$

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \text{ et } 3x - 2y + z = 0 \right\}$$

L'ensemble E_1 est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ? Les ensembles E_2 et E_3 sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ? On justifiera chaque réponse. [3 points]

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$ et

$$E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0) \right\}$$

L'application f est-elle linéaire? L'ensemble E_4 est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ? Les réponses seront justifiées. [2 points]