Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2018 - 2019
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n^o 2
PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.

Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* ***pas autorisées****.*

Exercice 1 : Considérons la proposition suivante :

$$(A) \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, ((\exists q \in \mathbb{N}, p = 2q) \Rightarrow (p \leq n))$$

1. Ecrire la négation de (A).
2. Déterminer si (A) est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

Exercice 2 : Démontrer que si n est un nombre impair positif, alors $2^n + 1$ est un multiple de 3.

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes :

$$(1)\ \arcsin(\sin(3+\pi)) \qquad\qquad (2)\ \sin(\arcsin(3-\pi))$$

Exercice 4 : Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 3^x - 2^x.$$

1. Déterminer tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = 0$.
2. Etudier le comportement de f en $\pm\infty$.
3. Déterminer le domaine et dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
4. Prouver qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
5. Prouver que $\alpha < 0$.
6. Dresser le tableau de variations de f et dessiner son graphe.