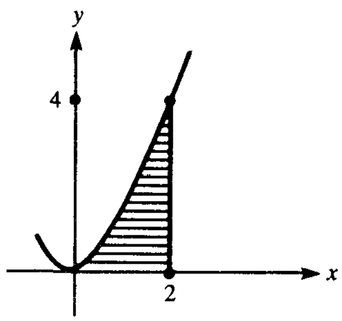
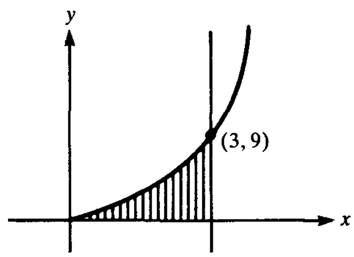
Math Analyse III automne 2018

Feuille 3 : Intégrales multiples, matrices jacobiennes

Exer. 3.1 Soit $\mathcal{R}$ le pavé $[-2,3]\times[1,4]$ dans $\mathbb{R}^2$. Calculer $\iint_{\mathcal{R}} \left(x^2-2xy^2+y^3\right) dA$. (Rép : 995/4)

Exer. 3.2 Exprimer l'intégrale double $I := \int_0^2 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$ lorsque l'ordre d'intégration est renversé. (Voir la figure ci-dessous à gauche.)





Exer. 3.3 Calculer $\iint_D e^{x^3}\,dA$, où D est le domaine borné par $y=x^2$, $x=3$, et $y=0$. (Voir la figure ci-dessus à droite.)

Exer. 3.4 Calculer $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^3}$ avec $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 1, y\geqslant 1, x+y\leqslant 3\}$. (Rép : 1/36)

Exer. 3.5 Évaluer l'intégrale iterée $I := \int_0^1 \int_y^1 \tan x^2\,dx\,dy$. (Indication : inverser l'ordre d'intégration ; rép : $-\frac{1}{2}\ln(\cos 1)$.)

Exer. 3.6 Évaluer l'intégrale $I := \int_0^1 \int_0^{\arccos x} e^{\sin y} dy\,dx$.

Exer. 3.7 Calculer $\iint_{\mathcal{D}} y^2\,dA$, où $\mathcal{D}$ est le domaine borné par $y=2x$, $y=5x$, et $x=2$.

Exer. 3.8 Évaluer $\iint_D x^2y^2\,dA$, où D est la partie compacte dans $\mathbb{R}^2$ délimitée par les droites $y=1$, $y=2$, $x=0$, et $x=y$.

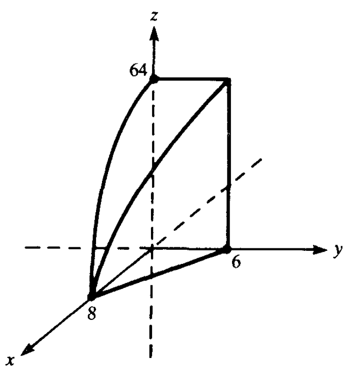
Exer. 3.9 Calculer $\iint_\Omega x^2 dA$, où $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x \geqslant y,\, x \leqslant 8\,,\, xy \leqslant 16\}$. (Il est suggéré de dessiner Ω ; rép : 448)

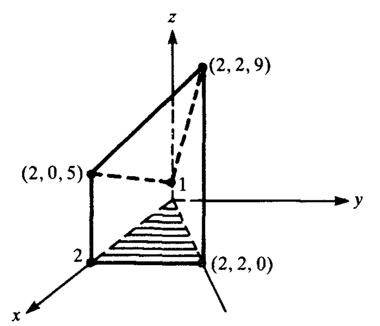
Exer. 3.10 Soit E le domaine compact dans $\mathbb{R}^2_+$ situé entre les courbes $y = x^4$ et $y = 4 - 3x^2$.

(a) Dessiner E.

(b) Quelles sont les trois intégrales doubles qu'il faut calculer afin de déterminer le centre de gravité $(\bar{x}, \bar{y})$ de E ? Le trouver.

Exer. 3.11 En calculant une certaine intégrale double, calculer le volume de la région dans $\mathbb{R}^3_+$ bornée par $x^2 + z = 64$, $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$, et $z = 0$. (Voir la figure à gauche ci-dessous ; penser au graphe de la fonction $z = 64 - x^2$.)





Exer. 3.12 Calculer le volume du domaine dans $\mathbb{R}^3_+$ délimité par $2x + 2y - z + 1 = 0$, $y = x$, et $x = 2$. (Voir la figure à droite ci-dessus.)

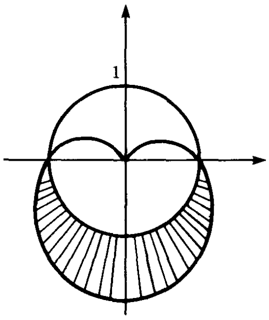
Exer. 3.13 Décrire le solide dont le volume est donné par $\displaystyle\int_0^2 \int_{2x}^4 \int_0^1 dz\, dy\, dx.$

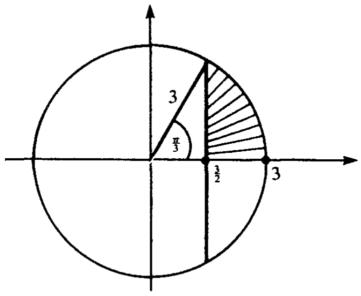
Exer. 3.14 Évaluer $\iiint_R e^{x+y+z} dV$, où R est la région dans $\mathbb{R}^3$ délimitée par le plan $2x + y + z = 4$ et les trois plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

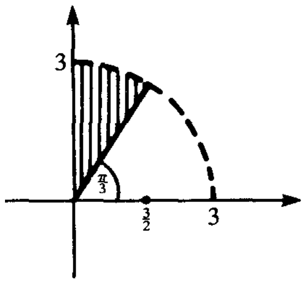
coordonnées polaires

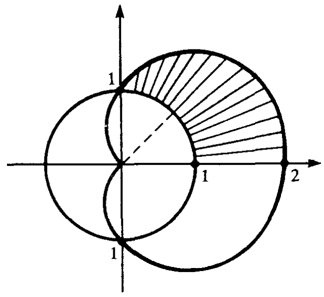
Exer. 3.15 On s'intéresse à l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^{3/2} \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{9-x^2}} 2xy\, dy\, dx.$

(a) Évaluer I directement (en coordonnées cartésiennes).









(b) Évaluer I en passant en coordonnées polaires (on trouve la figure, prochaine page).

Exer. 3.16 Calculer $\iint_B e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, où B est la boule (disque) unité euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

Exer. 3.17 À l'aide des coordonnées polaires, calculer l'intégrale double $I := \iint_D \frac{y\,dx\,dy}{a^2+x^2}$ où $a > 0$ et D consiste des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ tels que $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

Exer. 3.18 Décrire le domaine dans $\mathbb{R}^2$ dont l'aire est donnée par l'intégrale $\int_{\pi}^{2\pi}\int_{1}^{1-\sin\theta} r\,dr\,d\theta$. (La courbe $r = 1-\sin\theta$ décrit une *cardioïde* ; voir la figure ci-dessous.) Calculer son aire.

Exer. 3.19 Calculer l'aire du domaine dans $\mathbb{R}^2_+$ compris dans le cercle $x^2+y^2 = 9$ et à droite de la droite $x = \frac{3}{2}$. (Voir la figure ci-dessous.)

Exer. 3.20 Soit D la région à l'extérieur du cercle $r = 1$ et comprise dans la cardioïde $r = 1+\cos\theta$, avec $\theta \geqslant 0$. (Voir la figure ci-dessous)

(a) Calculer $I = \iint_D \sin\theta\,dA$. (Rép : 2/3)

(b) Calculer le centre de gravité $(\bar{x},\bar{y})$ de D.

coordonnées cylindriques et sphériques

Exer. 3.21 On considère le domaine borné D dans $\mathbb{R}^3$ qui est au-dessus du plan x–y, sous la paraboloïde $z = x^2+y^2$, et limité par le cylindre $x^2+y^2 = a^2$ (où $a > 0$).

(a) Quelles sont les conditions sur les coordonnées cartésiennes (x,y,z) d'un point P afin que ce point appartienne à D ?

(b) Quelles sont les conditions sur les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'un point P afin que ce point appartienne à D ?

(c) Calculer le volume de D, c-à-d, l'intégrale $\iiint_D dx\,dy\,dz$.

Exer. 3.22 On considère le domaine Ω dans $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geqslant 0\}$ qui est limité par-dessus par la sphère $x^2+y^2+z^2 = a^2$, et par-dessous par le cône $z^2 = x^2+y^2$ (où $a > 0$).

(a) Quelles sont les conditions sur les coordonnées cartésiennes (x,y,z) d'un point P afin que ce point appartienne à Ω ?

(b) Quelles sont les conditions sur les coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) d'un point P afin que ce point appartienne à Ω ?

(c) Calculer le volume de Ω.

Exer. 3.23 Utiliser les coordonnées cylindriques pour calculer le volume du solide convexe limité par le cylindre $x^2+y^2 = 25$ et entre les plans $z = 2$ et $x+z = 8$.

Exer. 3.24 Soit $\mathcal{H}$ la demi-boule $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2, z \geqslant 0\}$, où $a > 0$, et soit $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ son centre de gravité. Il est clair par symétrie que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Sachant que l'on a

$$\bar{z} = \frac{1}{\text{volume}(\mathcal{H})} \iiint_{\mathcal{H}} z\,dV\,,$$

utiliser les coordonnées sphériques pour calculer $\bar{z}$.

matrices jacobiennes

Exer. 3.25 On pose $u(s,t) = s^2 e^t$, $v(s,t) = 4s - t$.

(a) On définit la fonction vectorielle $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $(s,t) \mapsto G(s,t) = (u(s,t), v(s,t))$. Calculer la matrice jacobienne $JG(1,0)$.

(b) Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application $F(u,v) = (u - 3v^2, u^3)$. Calculer $JF(1,4)$.

(c) Expliciter la fonction composée $F \circ G(s,t)$.

(d) Calculer $J(F \circ G)(1,0)$ de deux façons différentes : en utilisant la réponse de (c) pour calculer la matrice jacobienne de $F \circ G$ directement, et en utilisant les réponses de (a) et (b) puis la formule pour la matrice jacobienne d'une fonction composée.

Exer. 3.26 Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction $F(x,y,z) = (x^3 + y^2 z + \sin(xyz), y + \ln(1 + xyz))$.

(a) Calculer la matrice jacobienne $JF(1,1,0)$, en justifiant son existence.

(b) Exprimer la différentielle $dF(1,1,0)(h,k,\ell)$.

(c) Le théorème des fonctions implicites nous permet de prouver (admis) l'existence de $\delta > 0$ et deux fonctions $\hat{x}(\cdot)$ et $\hat{z}(\cdot)$ définies et continûment dérivables sur l'intervalle $]1-\delta, 1+\delta[$ telles que $\hat{x}(1) = 1$, $\hat{z}(1) = 0$, et

$$F(\hat{x}(y), y, \hat{z}(y)) = (1,1), \quad y \in]1-\delta, 1+\delta[.$$

Trouver $\hat{x}'(1)$ et $\hat{z}'(1)$.

Exer. 3.27 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment dérivable. Quelle est la matrice jacobienne de l'application $x \mapsto \nabla f(x)$? (On la connait déjà, sous un autre nom.)

Exer. 3.28 On engendre un changement de variables $(x,y) \longleftrightarrow (u,v)$ en posant

$$y^2 = ux, \, x^2 = vy.$$

(a) Calculer le déterminant jacobien $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, et en déduire $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

(b) Dessiner dans le plan x–y le domaine compact $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^2_+$ délimité par les courbes $y^2 = x$, $y^2 = 8x$, $x^2 = y$, $x^2 = 8y$.

(c) À quel domaine Δ dans le plan u–v le domaine $\mathcal{D}$ correspond-t-il ?

(d) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$, c-à-d, l'intégrale $\iint_{\mathcal{D}} dx\,dy$.

Exer. 3.29 Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ défini par $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x^3 + y^3 \leqslant 1\}$. On considère la transformation $(x,y) \longleftrightarrow (u,v)$ engendrée par $x^3 = u$, $y^3 = v$.

(a) Quelle est l'image Δ (dans le plan u–v) du domaine D par cette transformation ?

(b) Calculer le déterminant jacobien $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ associé à la transformation.

(c) À l'aide du changement de variables $(x,y) \mapsto (u,v)$, calculer l'intégrale

$$J := \iint_D x^2 y^2 \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3} \, dx\,dy.$$

Exer. 3.30 Soit $\mathcal{D}$ le domaine dans $\mathbb{R}^2$ limité par les droites $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Démontrer que

$$\iint_{\mathcal{D}} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\,dy = \frac{\sin 1}{2}.$$

(Indication : poser $x - y = u$, $x + y = v$)