Math Analyse III   automne 2018

Feuille 1 : Intégrales généralisées et séries numériques

Intégrales impropres (ou généralisées)

Exer. 1.1 Déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent ou pas, et calculer la valeur dans le cas de convergence :

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \sin t\,dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ (discuter en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$)

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ (discuter en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$)

(f) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\cos t\,dt$ **(g)** $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ **(h)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

Exer. 1.2 Étudier les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

Exer. 1.3 Déterminer si les intégrales impropres suivantes sont absolument convergentes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 t\ln t\,dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{1+x^2}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^{1/2}}\,dt$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\left(3+2\cos^{10}x\right)\,dx$ **(e)** $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\,dt$ **(f)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Exer. 1.4 On définit une fonction $x \mapsto f(x)$ par la règle $f(x) = \dfrac{x}{x^2+8x+20}$.

(a) Pourquoi la fonction f est-elle définie et continue partout sur $\mathbb{R}$?

(b) Prouver que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverge vers $+\infty$.

(c) Prouver que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+8x+20)^2}$ converge.

Exer. 1.5 La fonction gamma.

(a) Prouver la convergence, pour $a > 0$ fixé, de l'intégrale généralisée

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

(b) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

(c) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exer. 1.6 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$.

- Montrer que si l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,dt$ converge alors $\ell = 0$.
- La condition $\ell = 0$ suffit-elle à garantir la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,dt$?

(b) Donner un exemple de fonction continue $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ à valeurs positives et non bornée (et donc telle que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$) telle que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,dt$ converge.

Exer. 1.7 Intégrales de Bertrand. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On veut étudier la nature de l'intégrale impropre

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,dt.$$

(a) On suppose $\alpha > 1$.

- Montrer qu'il existe $\gamma > 1$ tel que $\dfrac{t^\gamma}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \longrightarrow 0$ quand t tend vers $+\infty$.
- En déduire la convergence de l'intégrale étudiée.

(b) On suppose $\alpha = 1$.

- Soit $x > e$. Calculer $\displaystyle\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,dt$.
- Déterminer pour quels $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale étudiée converge.

(c) On suppose enfin $\alpha < 1$.

- Déterminer la limite de $\dfrac{t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
- En déduire la nature de l'intégrale étudiée.

Exer. 1.8 Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ et soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

(a) Définir et nommer la condition $f(x) = o_{x\to c}(g(x))$.

(b) Définir et nommer la condition $f(x) \sim_{x\to c} g(x)$.

(c) Refaire (a)(b) dans le cas $c = +\infty$.

(d) Énoncer un résultat sur la convergence d'une intégrale impropre de la forme $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ qui utilise deux hypothèses de type (b).

Exer. 1.9 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^a}\,dt$.

Exer. 1.10 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x\ln(2+x^2)}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$ **(c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\,dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cosh x-\cos x}{x^{5/2}}\,dx$ **(e)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin\left(1/x^2\right)}{\ln(1+x)}\,dx$

Exer. 1.11 Discuter, selon les valeurs du paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x+e^{\alpha x})\,dx$
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}\right)dx$ où $\alpha\in[-4,+\infty[$.

Exer. 1.12 Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln(\operatorname{th} t)\,dt$.

Exer. 1.13 Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables sur les intervalles donnés :

(a) $x\longmapsto x-\sqrt{1+x^2}$ sur $[0,+\infty[$ **(b)** $x\longmapsto \dfrac{\sin^3(3x)}{\sin^2(2x)}$ sur $]0,\pi/2[$

Exer. 1.14 (a) Montrer que l'intégrale impropre suivante converge : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$.

(b) On montre maintenant que l'intégrale n'est que semi-convergente.

1. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|\sin t|\geq \sin^2 t$.
2. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,dt$ est convergente.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(y)|}{y}\,dy$ diverge.

(c) On va maintenant calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$.

1. Montrer que la fonction $f(y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{\sin(y)}$ est prolongeable en une fonction C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et en déduire que $\int_0^{\pi/2} f(y)\sin(ny)\,dy$ tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$.
2. Pour tout entier $n\geq 0$, on pose $J_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(ny)}{\sin(y)}\,dy$. Trouver une relation entre J_n et J_{n-2} et en déduire la valeur de J_n.
3. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$.

Exer. 1.15 Prouver que *l'intégrale de Fresnel* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ est semi-convergente.

Exer. 1.16 Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)dt}{1+t^2}$$

converge. Grâce à un changement de variables simple, montrer qu'elle est nulle. En déduire que, pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)dt}{a^2+t^2} = \frac{\pi \ln(a)}{2a}.$$

Exer. 1.17 (a) Montrer que les intégrales impropres $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt$ convergent et sont égales.

(b) Montrer que $2I = -\frac{\pi \ln 2}{2} + I$ et en déduire la valeur de I. On pourra commencer par écrire $2I = I + J$ puis utiliser l'identité $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

(c) En déduire la valeur de $I = J$.

Exer. 1.18 (a) Montrer que l'intégrale impropre $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ est absolument convergente.

(b) Montrer qu'il existe une suite de réels $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ tendant vers 0 telle que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$I = -\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln(t)dt + \varepsilon_n.$$

(c) En déduire que la suite $(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2})_{n\geq 0}$ converge et que $I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}$. On peut montrer que cette limite vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

Exer. 1.19 Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ continues telles que les intégrales $\int_a^b f(t)^2 dt$ et $\int_a^b g(t)^2 dt$ soient convergentes. Montrer que $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est absolument convergente et que

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

Séries numériques

Exer. 1.20 Étudier les séries suivantes (déterminer la nature, donner la somme si possible) :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+100}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n}{n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Exer. 1.21 Une balle de caoutchouc tombe d'une hauteur initiale de 10m. Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit de $2/3$ de sa hauteur précédente. Quelle est la distance totale parcourue par la balle avant qu'elle devienne stationnaire ?

Exer. 1.22 (1) Énoncer les règles de comparaison et de comparaison à la limite portant sur la convergence/divergence des séries.

(2) Étudier chacune des séries suivantes, en utilisant ces règles :

$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{3}{5^n+2} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n^3+10)^{1/4}} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$$

Exer. 1.23 (1) Énoncer les règles de Cauchy, de D'Alembert, et de comparaison intégrale.

(2) Donner la nature de chacune des séries suivantes, en utilisant une de ces trois règles :

$$\textbf{(a)} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{e^n} \qquad \textbf{(b)} \quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n} \qquad \textbf{(c)} \quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

$$\textbf{(d)} \quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n} \qquad \textbf{(e)} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(2n)!} \qquad \textbf{(f)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$$

Exer. 1.24 (1) Énoncer la règle de Riemann sur la convergence/divergence des séries.

(2) Étudier chacune des séries suivantes, en utilisant cette règle :

$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3+3}} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2+1} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{10}}$$

Exer. 1.25 Prouver que les séries suivantes convergent, et trouver leur somme :

$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+4)}$$

Exer. 1.26 Les *séries de Bertrand* ont leur terme général de la forme $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où α et β sont des paramètres réels.

(a) Prouver qu'elles convergent si $\alpha > 1$ (pour tout β) et divergent si $\alpha < 1$ (pour tout β).

(b) Lorsque $\alpha = 1$, montrer qu'elles convergent pour $\beta > 1$ et divergent pour $\beta \leq 1$.

Exer. 1.27 On peut montrer que la règle de Cauchy est plus générale que la règle de D'Alembert (c-à-d, que la première permet en principe de traiter tous les cas où la seconde est concluante). On donne ici un exemple qui montre que la différence est stricte : un cas où la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas la règle de D'Alembert. On fixe $a > 0$, $b > 0$ et on pose

$$u_n = \begin{cases} a^p b^p & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \\ a^{p+1} b^p & \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

(a) Montrer que u_{n+1}/u_n n'admet pas de limite quand $a \neq b$, et que par conséquent la règle de D'Alembert ne s'applique pas.

(b) Montrer que $\sqrt[n]{u_n} \to \sqrt{ab}$, et en déduire par la règle de Cauchy que la série converge si $ab < 1$ et diverge si $ab > 1$.

(c) Déterminer la nature de la série dans le cas $ab = 1$.

Exer. 1.28 On rappele que deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont dites *équivalentes à l'infini* (et on écrit $u_n \sim v_n$) lorsque $\lim u_n/v_n = 1$. C'est une proposition du cours que deux séries *positives* équivalentes ont la même nature. Employer ce résultat (éventuellement à l'aide d'un DL afin de trouver l'équivalence) pour étudier les séries dont le terme général u_n est donné par :

(a) $\dfrac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3 - 2\sqrt{n} + 3\ln n}$ **(b)** $e^{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}} - 1$ **(c)** $\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$

Exer. 1.29 Déterminer la nature de chacune des séries suivantes :

(a) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\arctan n}{n^2+1}$ **(b)** $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2}{e^n}$ **(c)** $\sum_{n\geq 2} \dfrac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n\sqrt{n-1}}$

(d) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ **(e)** $\sum_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$ **(f)** $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n(n+1)}{2n+1}$

(g) $\sum_{n\geq 1} \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln n}$ **(h)** $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ **(i)** $\sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$

(j) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ **(k)** $\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}}$ **(l)** $\sum_{n\geq 1} e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exer. 1.30 (constante d'Euler) Nous montrons que la quantité $f(n) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ admet une limite finie γ, appelée *constante d'Euler*.

(a) On pose $u_n = f(n+1) - f(n)$. Montrer par un DL suivant $\dfrac{1}{n}$ que $u_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.

(b) En déduire que $\sum u_n$ converge, et que, par conséquent, $f(n)$ admet une limite γ quand n tend vers l'infini. (La valeur précise de γ est $0,5772\ldots$, trouvée en 1781 par vous savez qui.)

Exer. 1.31 On sait que pour deux séries positives $\sum u_n$ et $\sum v_n$, si on a $u_n \sim v_n$ quand $n \to \infty$ (c-à-d, $\lim u_n/v_n = 1$), alors les séries ont la même nature. On développe ici un exemple qui montre que cette conclusion fait défaut pour les séries de signes variables. On pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

(a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

(b) Prouver que $\sum v_n$ est une série alternée qui converge.

(c) Pourquoi le théorème sur les séries alternées ne s'applique-t-il pas à $\sum u_n$?

(d) Prouver que $u_{2p} + u_{2p+1} \sim -\frac{1}{p}$ quand $p \to \infty$. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

Exer. 1.32 Lorsqu'une série est convergente mais non absolument convergente, il peut arriver que la somme de la série n'est pas stable par un regroupement de ses termes. On illustre ce phénomène par un exemple. On pose $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ est conditionnellement (et non pas absolument) convergente.

Écrivons la somme de la série d'une façon regroupée ainsi :

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{4p-3}}+\frac{1}{\sqrt{4p-1}}-\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)+\ldots$$

et en appelant $v_p\,(p \geq 1)$ le terme général $\left(\frac{1}{\sqrt{4p-3}}+\frac{1}{\sqrt{4p-1}}-\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)$.

(b) Montrer que $\sum v_p$ est une série positive divergente.

(On montre que ce phénomène d'instabilité par rapport à un regroupement de termes ne se produit pas lorsque la série est absolument convergente.)

Exer. 1.33 Le produit de Cauchy de deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est la série $\sum c_n$ de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

(a) Montrer que si les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont nulles à partir d'un certain rang alors

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\right).$$

(b) Montrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors il en va de même de $\sum c_n$ et que l'on a dans ce cas

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\right).$$

(c) Pourquoi la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est-elle semi-convergente ? Montrer le produit de Cauchy par elle-même de la sÈrie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ diverge. On pourra remarquer que $k(n-k) \leq (n-1)^2$ pour tout entier k compris entre 1 et n.