Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019

Algèbre III - Licence Mathématiques Générales et Applications L2

Feuille d'exercices n°5

Polynôme minimal - Théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 1. ♦ Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes avec $a \neq b$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. ♦ Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices réelles suivantes soient diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit n un entier suprieur ou égal à 2. On considère l'application linéaire Trace : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à toute matrice associe la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Déterminer l'image de Trace et la dimension de son noyau.
2. Montrer que l'on a une somme directe :
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\text{Trace}) \oplus \text{Vect}(I_n).$$
3. Soit u l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$u(A) = A + \text{Trace}(A)\, I_n.$$
   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Est-il inversible ?

Exercice 4. ♦ Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de chacune des matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

puis déterminer si elles sont diagonalisables.

Exercice 5. ♦ Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^4 = f^2$$

On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 6. ⧫ A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. ⧫ Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^3 = X$.

Exercice 8. ⧫ L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$X^3 + X = 0. \tag{1}$$

Soit A une matrice non nulle satisfaisant l'équation (1).

1. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = \ker A \oplus \ker(A^2 + I_3).$$
2. Montrer que $\ker(A^2 + I_3)$ est nécessairement de dimension paire, et en déduire que $\ker A$ est de dimension 1.
3. Déterminer le polynôme minimal de A.
4. Montrer que A est semblable à la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$