

Feuille d'exercices n° 2
RÉVISIONS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

1 Espaces vectoriels – Bases

Exercice 1. On considère les vecteurs suivants de \mathbb{R}^5 : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
2. Soit $v \in \mathbb{R}^5$. À quelle condition $v \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$?
3. Trouver un supplémentaire de $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ dans \mathbb{R}^5 .

Exercice 2.

1. Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie n . Montrer que si $\dim F + \dim G > n$, alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.
2. Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$ et $y = (1, 1, 0, -1)$. Soit $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$. Quelles sont les dimensions de $F, G, F + G$ et $F \cap G$?

2 Applications linéaires – Théorème du rang

Exercice 3. On considère l'application u :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c) &\longmapsto (a + b - c, 3a + b - 3c, -a + b + c, 2a - 2c) \end{aligned}$$

1. Montrer que u est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 .
2. Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{R}^4 .
3. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de u .

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application u :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z) \end{aligned}$$

1. Montrer que u est une application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer le noyau et l'image de u .

3 Matrices – Changements de base

Exercice 5. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -16 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = 2x\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = -2x\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 , en donner une base et leurs dimensions.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
3. Soit e_1 un vecteur directeur de E et (e_2, e_3) une base de F . Calculer la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) .

Exercice 6.

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées. Montrer que AB et BA ont la même trace.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de \mathbb{R}^n . Montrer que toutes les matrices de u ont la même trace.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Montrer que pour tout entier naturel k , les matrices A^k et B^k ont la même trace.

Exercice 7. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $\varepsilon_1 = (1; 1; 1)$, $\varepsilon_2 = (1; -1; 0)$, $\varepsilon_3 = (1; 0; 1)$ et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que \mathcal{B} constitue une base de \mathbb{R}^3 .
2. Écrire la matrice M de u dans cette base. Quelle relation lie A et M ?
3. Déterminer une base de $\text{Ker } u$ et de $\text{Im}(u)$.

4 Inversibilité

Exercice 8. Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et expliciter son inverse.