Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2017-2018**
L3 - Mathématiques générales et applications UE : Topologie et équations différentielles

Feuille d'exercices n° 9

Exercice 1. Établir si les parties suivantes de $\mathbf{R}$ sont complètes ou non : $[0,1]$, $]0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$.

Exercice 2. Soit X un ensemble et $f : X \to \mathbf{R}$ une application injective. On définit pour tout $x, y \in X$,

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)|.$$

1. Montrer que d définit une distance sur X.
2. Supposons que (X, d) est complet. Montrer que $f(X)$ est alors fermé dans $\mathbf{R}$.
3. Supposons réciproquement que $f(X)$ est fermé dans $\mathbf{R}$. Montrer que (X, d) est complet.

Exercice 3.

1. Rappeler le théorème du cours qui permet de vérifier que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [0,1]$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction racine carrée sur $[0,1]$. Que peut-on en déduire sur $(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$?
3. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$, on pose $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ et que muni de cette norme, $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ est complet.
4. Montrer que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.
   Indication : utiliser la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \inf(n, \frac{1}{\sqrt{x}})$.

Exercice 4.

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|T\| < 1$.
   (a) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge dans $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Montrer que $I - T$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$, et que $(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.
2. Soit un entier $n \geq 2$. On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices réelles de taille $n \times n$ muni de la norme matricielle $|||\cdot|||$ subordonnée à la norme euclidienne.
   (a) Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (b) Pour $A \in GL_n(\mathbf{R})$, montrer que

$$B\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right) \subset GL_n(\mathbf{R}).$$

Exercice 5. Dans cet exercice, il est commode de noter une suite réelle $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sous la forme $(x(n))_{n\in\mathbf{N}}$. On considère l'espace vectoriel $\ell^1 = \left\{ x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \colon \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| < \infty \right\}$, l'espace vectoriel $Conv$ des suites réelles convergentes et ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées.

1. Montrer que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Montrer ℓ^1 est inclus dans ℓ^∞.
3. Montrer que $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.
4. Montrer que $(Conv, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de montrer que les espaces normés $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ sont complets pour $p \in [1, +\infty[$. Rappelons que ce sont des espaces de suites réelles, qui seront notées ici comme des fonctions $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$.

Fixons un réel $p \geq 1$. Pour toute suite réelle x, on définit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$$

qui est un nombre réel ou infini. L'espace ℓ^p est l'ensemble des suites x tel que $\|x\|_p < +\infty$. De plus, l'application $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur ℓ^p.

Afin de montrer que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est complet, on considère une série normalement convergente de terme général $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ dans ℓ^p.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$, montrer que la série $\sum x_k(n)$ est absolument convergente dans $\mathbf{R}$. En déduire que cette série converge dans $\mathbf{R}$. On note $x(n)$ sa limite : $x(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(n)$.
2. Le but de cette question est de montrer que la série $\sum x_k$ converge dans ℓ^p vers x.
   (a) On fixe un entier N. Montrer que pour tout entier K,
   $$\left(\sum_{n=0}^{N} \left| \sum_{k=0}^{K} x_k(n) \right|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{k=0}^{K} \|x_k\|_p.$$
   En déduire que
   $$\left(\sum_{n=0}^{N} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(n) \right|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\|_p,$$
   (b) En déduire que $x \in \ell^p$ et $\|x\|_p \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\|_p$.
   (c) Montrer que la série $\sum x_k$ converge dans ℓ^p vers x.
3. Conclure.

Exercice 7. On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme euclidienne. Soit $A = B(0,1)$. On considère deux distances sur A : la distance d_1 induite par la norme euclidienne et $d_2(x,y) = \|x-y\|_2 + \left| \frac{1}{d_1(x, A^c)} - \frac{1}{d_1(y, A^c)} \right|$ pour $(x,y) \in A$.

1. Vérifier que d_2 est une distance.
2. Montrer que $\mathrm{id}\colon (A, d_1) \to (A, d_2)$ est un homéomorphisme.
3. Montrer que (A, d_1) n'est pas complet.
4. Montrer que (A, d_2) est complet. Conclusion ?

Exercice 8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de x et y.

1. Montrer l'identité du parallélogramme : pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$,
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2.$$
2. Soit C une partie convexe non vide et fermée de $\mathbf{R}^n$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, il existe un unique $c \in C$ tel que $\|x - c\|_2 = \inf\limits_{y \in C} \|x - y\|_2$. On note $P_C(x)$ ce point.
3. Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Montrer que $P_C(x)$ est caractérisé par
$$\forall y \in C,\ \langle y - P_C(x), x - P_C(x)\rangle \leq 0.$$
Interpréter géométriquement cette inégalité.
4. En déduire que C est l'intersection de tous les demi-espaces fermés le contenant.
5. Soit C_1 et C_2 deux parties convexes, non vides, fermées et disjointes de $\mathbf{R}^n$. On suppose de plus que C_1 est une partie compacte. Montrer qu'il existe un hyperplan affine qui sépare C_1 et C_2.

Exercice 9. Soient (X, d) un espace métrique complet, $f \colon X \to X$ et $k \in \mathbf{N}^*$. On suppose que $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (k fois) est contractante. Montrer que f a exactement un point fixe.

Exercice 10. On note E l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ muni de la norme uniforme : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.
Soit $K \in \mathcal{C}([0,1]^2, \mathbf{R})$, on note $\|K\|_\infty = \sup\limits_{(x,y) \in [0,1]^2} |K(x,y)|$.
Pour tout $f \in E$, on pose
$$\forall x \in [0,1],\ Tf(x) = \int_0^x K(x,y) f(y)\, dy.$$
On admet que $Tf \in E$.

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}\big(E, E\big)$.
2. Montrer que, pour $k \geq 1$, on a $\|T^k\| \leq \dfrac{\|K\|_\infty^k}{k!}$.
Indication : commencer par montrer que pour tout $k \geq 1$, tout $x \in [0,1]$, $|T^k(x)| \leq \dfrac{\|K\|_\infty^k\, x^k}{k!} \|f\|_\infty$.
3. En déduire que la série $\sum T^k$ converge dans E. Déterminer sa limite.
4. Montrer que, pour tout $g \in E$ l'équation $Tf = f + g$ a exactement une solution.

Exercice 11. Pour $x_0 \in \mathbf{R}$, on définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ par la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n.$$
On veut montrer le résultat suivant : *il existe un unique choix de $x_0 \in \boldsymbol{R}$ tel que pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $x_n \in [10, 11]$.*

1. Montrer que $Y = \{\, (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty \colon \forall n \in \mathbf{N},\ y_n \in [10, 11] \,\}$, muni de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$ est complet.
2. Pour tout $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in Y$, on définit la suite $F(y)$ par :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \big(F(y)\big)_n = \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n}.$$
Montrer que $F \colon Y \to Y$ est bien définie et contractante.
3. Conclure.

Exercice 12. Soit (E, d) un espace métrique. On rappelle que $d' = \min(1, d)$ est une distance sur E topologiquement équivalente à d. Vérifier que (E, d) est complet si et seulement si (E, d') l'est également.

Exercice 13. On reprend les notations de l'exercice 8 de la feuille 8 : soit une famille d'espaces métriques complets $((X_n, d_n))_{n \in \mathbf{N}}$ telle que chacune des distances est majorée par 1.
On munit l'espace produit $X = \prod_{n \in \mathbf{N}} X_n$ de la distance δ définie de la manière suivante : pour $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans X, on pose

$$\delta(u, v) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{d_n(u_n, v_n)}{2^n}.$$

Montrer que (X, δ) est complet.