**Université Claude Bernard - Lyon 1** | **Semestre automne 2017-2018**

L3 - Mathématiques générales et applications | UE : Topologie et équations différentielles

---

**Feuille d'exercices n° 8**

---

**Exercice 1.** Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts dans $\mathbf{R}^2$ muni de la topologie usuelle :
- $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^4 \leq \cos(xy)\}$,
- $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 < xy \leq x^2 \leq 1\}$,
- $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 \leq xy \leq x^2 \leq 1\}$.

**Exercice 2.** Soit un entier $n \geq 2$ et l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbf{R})$ des matrices réelles de taille $n \times n$ ($M_n(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension $n^2$). On note $|||\cdot|||$ la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$, c'est-à-dire, pour $M \in M_n(\mathbf{R})$,

$$|||M||| = \sup_{X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2}.$$

On considère l'ensemble des matrices orthogonales $O(n) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \colon {}^tAA = I_n\}$.

1. Soit $A \in O(n)$. Déterminer $|||A|||$.
2. Montrer que $O(n)$ est compact.
3. Qu'en est-il avec les matrices inversibles ?

**Exercice 3.** Soit $X$ un ensemble muni de la distance discrète $d$ (i.e. pour tous $x, y \in X$, on a $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ sinon). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(X, d)$ soit compact.

**Exercice 4.** Soient $A$ et $B$ deux parties d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$.

1. Montrer que si $A$ et $B$ sont compacts, alors $A + B$ est compact.
2. Montrer que si $A$ est compact et $B$ est fermé, alors $A + B$ est fermé.
3. Montrer que si $A$ et $B$ sont fermés, cela n'implique pas que $A + B$ soit fermé.

**Exercice 5.** Soit $(X, d)$ un espace métrique. On considère une famille $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de compacts de $X$ et $K$ un compact de $X$ tels que

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} K_n = K \text{ et pour tout entier } n \in \mathbf{N},\ K_{n+1} \subset K_n.$$

Soit $U$ un ouvert de $X$ tel que $K \subset U$. Montrer qu'il existe un entier $n_0$ tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geq n_0$.

**Exercice 6.**

1. Soit $f\colon \mathbf{R}^n \to [0,+\infty[$ une fonction continue telle que $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $f$ admet un minimum.
2. Soit $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $g(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (a) Montrer que $g$ est bornée.
   (b) La fonction $g$ atteint-elle nécessairement ses deux bornes ?
   (c) Montrer que $g$ atteint au moins l'une de ses bornes.

**Exercice 7.** Le but est de montrer le théorème d'Alembert Gauss : tout polynôme non-constant à coefficients complexes admet une racine complexe.
Soit $P$ un polynôme non-constant à coefficients complexes.

1. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $P(z_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $\left|\frac{P(z_0+z)}{P(z_0)}\right| < 1$.
   *Indication : justifier que le polynôme $Q(z) = \frac{P(z_0+z)}{P(z_0)}$ doit avoir la forme $Q(z) = 1 + \sum_{i=k}^{n} b_k z^k$ avec $b_k \neq 0$. Soit $b_k = re^{i\varphi}$ et $z_\rho = \rho e^{i(\pi-\varphi)/k}$ avec $\rho \in ]0,+\infty[$. Vérifier que si $\rho$ est suffisamment petit, alors $|Q(z_\rho)| < 1$.*
2. Montrer que la fonction $f : z \mapsto |P(z)|$ définie sur $\mathbf{C}$ admet un minimum global, disons en $z_1 \in \mathbf{C}$.
3. Déduire de 1. que $P(z_1) = 0$.

**Exercice 8.** Soit une famille d'espaces métriques $((X_n, d_n))_{n\in\mathbf{N}}$ compacts telle que chacune des distances est majorée par 1. (Remarque, pour tout espace métrique, il existe une distance topologiquement équivalente majorée par 1, cf exemple sur $\mathbf{R}$ dans l'exercice 3 de la fiche 1.)
On munit l'espace produit $X = \prod_{n\in\mathbf{N}} X_n$ de la distance $\delta$ définie de la manière suivante : pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $X$, on pose

$$\delta(u,v) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{d_n(u_n,v_n)}{2^n}.$$

1. Vérifier que $\delta$ est une distance.
2. Soit $(u^{(\nu)})_{\nu\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $X$ et $u \in X$. Montrer que
$$\delta(u^{(\nu)},u) \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{ssi} \quad \forall n \in \mathbf{N} :\ d_n(u_n^{(\nu)},u_n) \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
3. Montrer que $(X,\delta)$ est compact.
4. Montrer que $U$ est un ouvert de $(X,\delta)$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe une partie finie $J \subset \mathbf{N}$ et un réel $\alpha > 0$ vérifiant :
$$\forall y \in X\ \forall i \in J\ \ d_i(y_i,x_i) < \alpha \Rightarrow y \in U$$

**Exercice 9.**

1. En utilisant la fonction arctan, montrer que $\mathbf{R}$ est homéomorphe à l'intervalle $]-1,1[$.
2. En déduire que l'on peut rendre $\mathbf{R}$ compact en ajoutant deux points $-\infty$ et $+\infty$.
3. Montrer que $\mathbf{R}$ est homéomorphe au cercle unité de $\mathbf{R}^2$ privé du point $(-1,0)$.
4. En déduire que l'on peut rendre $\mathbf{R}$ compact en lui ajoutant un seul point.

**Exercice 10.** Soient $K$ un compact et $F$ un fermé d'un espace métrique $(X, d)$ tels que $F \cap K = \emptyset$. Soit $d(K, F) = \inf\{d(x, y) : x \in K, y \in F\}$.

1. Montrer que $d(K, F) > 0$.
2. Montrer que si l'on suppose que $F$ est compact, alors il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $d(x, y) = d(K, F)$.

**Exercice 11.** Lesquels des sous-ensembles suivants de $C([0,1], \mathbf{R})$ (muni de la norme du sup) sont compacts ? (i) $C^1([0,1], \mathbf{R})$, (ii) $\overline{B}(0,1)$.

**Exercice 12.** Soit $(K, d)$ un espace métrique compact et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de fonctions réelles continues sur $K$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur $K$.

1. Montrer que pour chaque $n \in \mathbf{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $f_n(x_n) = \max_{x\in K} f_n(x)$.
2. Montrer que la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. Démontrer que $f_n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $K$.

**Exercice 13.** Soient $(K, d)$ un espace métrique compact et $f : K \to K$ une fonction telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ si $x, y \in K$ et $x \neq y$.

1. Montrer que $f$ a au plus un point fixe.
2. Montrer qu'il existe un élément $a \in K$ tel que $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$ pour tout $x \in K$.
3. Montrer que $a$ est le point fixe de $f$.
4. Pour $x_0 \in X$, on définit $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $(d(x_n, a))_{n\geq 0}$ converge vers une limite $l \geq 0$.
5. Montrer que $l = 0$. Conclusion ?

**Exercice 14.** Soient $A$ et $B$ deux parties convexes de $(E, \|\cdot\|)$.

1. Montrer que le plus petit ensemble convexe contenant à la fois $A$ et $B$ est $C = \{(1-\lambda)a + \lambda b \colon a \in A, b \in B, \lambda \in [0,1]\}$.
2. Montrer que si $A$ et $B$ sont compacts alors $C$ est compact.

**Exercice 15.** Soient $n$ et $m$ deux entiers strictement positifs, et soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$.

1. Montrer que pour tout compact $K$ de $\mathbf{R}^m$, $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbf{R}^n$.
2. Énoncer et montrer la réciproque de ce résultat.