Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2017-2018**

L3 - Mathématiques générales et applications | UE : Topologie et équations différentielles

---

Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1.

1. Déterminer toutes les solutions (x_1, x_2) du système linéaire homogène
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) + 4x_2(t) \end{array}\right. , \; t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$
2. Calculer la solution de (1) satisfaisant de plus : $x_1(1) = 4, \; x_2(1) = 0$.
3. Déterminer la solution (y_1, y_2) du problème de Cauchy suivant :
$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) & = & -2y_1(t) + 4y_2(t) + e^t \\ y_1(0) & = & 2 \\ y_2(0) & = & 0. \end{array}\right. , t \in \mathbf{R}$$

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 :
$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0, \; t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

1. Mettre (2) sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 de dimension 2.
2. Donner toutes les solutions de (2).
3. Trouver la solution du problème de Cauchy :
$$\left\{\begin{array}{l} x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = t \\ x(0) = \frac{27}{25}, \\ x'(0) = 0. \end{array}\right. , \; t \in \mathbf{R}.$$

Exercice 3.

Soit $\omega_0 > 0$, $c \in \mathbf{R}^*$. Soit $\omega > 0$ tel que $\omega \neq \omega_0$. On considère l'équation différentielle du second ordre
$$(E_\omega) \quad y''(t) + \omega_0^2 y(t) = c \sin(\omega t), \; t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Cette équation modélise le mouvement d'un corps attaché à un ressort élastique sous l'action d'une force périodique de pulsation ω, en l'absence de frottement ; $y(t)$ représente la position du corps à l'instant t.

1. Déterminer une solution particulière z_ω de (E_ω).
2. Donner toutes les solutions de (E_ω).
3. Déterminer la solution y_ω de (E_ω) vérifiant $y_\omega(0) = 1$ et $y_\omega'(0) = \dfrac{c\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.
4. Montrer que
$$\lim_{\omega \to \omega_0} \left(\sup_{t \in \mathbf{R}} |y_\omega(t)| \right) = +\infty.$$
Ce phénomène est appelé *résonance*.

Exercice 4. On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \end{array}\right. \qquad t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

1. Déterminer toutes les solutions de (4).
2. Déterminer la solution de (4) telle que $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit $u \in \mathbf{R}^3$ tel que $\|u\|_2 = 1$. Pour deux vecteurs x et y dans $\mathbf{R}^3$, on note $x \cdot y$ leur produit scalaire (canonique). On rappelle la définition du produit vectoriel de deux vecteurs x et y dans $\mathbf{R}^3$: $x \wedge y$ est le vecteur de $\mathbf{R}^3$ tel que pour tout $z \in \mathbf{R}^3$, $\det(x, y, z) = (x \wedge y) \cdot z$.
$x \wedge y$ est un vecteur orthogonal à x et à y et si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, alors on a aussi

$$x \wedge y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'équation différentielle

$$x'(t) + u \wedge x(t) = 0, \ t \in \mathbf{R} \tag{5}$$

où $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$.

1. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^3$. Justifier que l'équation (5) admet une unique solution maximale vérifiant $x(0) = x_0$ et que cette solution est définie sur $\mathbf{R}$. On note x cette solution.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\|x(t)\|_2 = \|x_0\|_2$.
3. Montrer que l'application $t \mapsto x(t) \cdot u$ est constante sur $\mathbf{R}$.
4. Réécrire (5) sous la forme $x'(t) = Ax(t)$.
5. Calculer explicitement la solution x dans le cas $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dessiner la trajectoire dans un repère de $\mathbf{R}^3$.
6. Donner l'expression de x dans le cas général.

Exercice 6. *Un système à coefficients non constants*
On considère le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = tx(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + ty(t) \end{array}\right. , \ t \in \mathbf{R} \tag{6}$$

où $x, y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
Déterminer pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, la solution de (6) telle que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.
Indication : on pourra poser $z = x + iy$.

Exercice 7.

Soit $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\theta(t)|dt < \infty$. On considère l'équation différentielle linéaire

$$x''(t) + (1+\theta(t))x(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

On suppose que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une solution de (7). On pose pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$g(t) = f(t) + \int_0^t \theta(s)f(s)\sin(t-s)ds.$$

1. Vérifier que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g''(t) + g(t) = 0$.
2. En déduire qu'il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $t \geq 0$,

$$|f(t)| \leq A + \int_0^t |\theta(s)| \cdot |f(s)|ds$$

3. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 8.

Soit $q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et intégrable, *i.e.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |q(t)|dt < \infty$. On considère l'équation différentielle linéaire

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0, \ t \in \mathbf{R}. \tag{8}$$

1. Justifier que toute solution de (8) est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.
2. Soit $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une solution bornée de (8). Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} x'(t) = 0$.
3. Montrer que l'équation (8) admet des solutions non bornées. *Indication : on pourra considérer un système fondamental de solutions et leur wronskien.*

Exercice 9. *Équations différentielles linéaires à coefficients périodiques en dimension 1*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et T-périodique (avec $T > 0$). On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire suivante

$$u'(t) = f(t)u(t), \ t \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

1. Trouver $b \in \mathbf{R}$ et $q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+*}$ une application continue et T-périodique telle que u est solution de (9) si et seulement si $v : t \mapsto q(t)u(t)$ est solution de $v' = bv$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que les solutions de (9) soient toutes bornées.

Exercice 10. *Deux équations différentielles linéaires à coefficients périodiques en dimension 2*

1. On considère le système différentiel $u'(t) = A(t)u(t)$ où pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

   (a) Soit $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ une solution de $u'(t) = A(t)u(t)$. Trouver une équation différentielle satisfaite par $r : t \mapsto r(t) = \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2}$ où $(u_1(t), u_2(t))$ sont les composantes de $u(t)$.

   (b) En déduire que les solutions de $u'(t) = A(t)u(t)$ sont toutes bornées sur $\mathbf{R}$.

2. On considère le système différentiel $u'(t) = A(t)u(t)$ où pour tout $t \in \mathbf{R}$
$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

   (a) Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et une application $Q : \mathbf{R} \to \mathcal{O}_2(\mathbf{R})$ 4π-périodique (où $\mathcal{O}_2(\mathbf{R})$ est le groupe des matrices orthogonales réelles de dimension 2) telles que pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$A(t) = Q(t)MQ(t)^T.$$

   (b) Soit u une solution de $u'(t) = A(t)u(t)$ et soit $v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2,\ t \mapsto v(t) = Q(t)^T u(t)$. Montrer que v est solution d'un système linéaire à coefficients constants $v' = Bv$, où $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est une matrice que l'on déterminera.

   (c) Réciproquement, soit v une solution de $v' = Bv$. Montrer que $u : t \mapsto Q(t)v(t)$ est solution de $u'(t) = A(t)u(t)$.

   (d) Les solutions de $u'(t) = A(t)u(t)$ sont-elles bornées sur $\mathbf{R}^+$? sur $\mathbf{R}^-$? sur $\mathbf{R}$?

   Indication : on pourra étudier le spectre de B.

L'étude menée dans les exercices 9 et 10 sur des cas particuliers en dimension $d \leq 2$ peut en fait être généralisée à une dimension d quelconque. On a en effet les deux résultats suivants, connus sous le nom de théorèmes de Floquet-Lyapunov.

Théorème 1 : *Soit $A : \boldsymbol{R} \to \mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$ une application T-périodique. Il existe une application T-périodique $Q : \boldsymbol{R} \to GL_n(\boldsymbol{C})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$ telles que u est solution de $u'(t) = A(t)u(t)$ si et seulement si $v : t \mapsto Q(t)u(t)$ est solution de $v'(t) = Bv(t)$.*

Théorème 2 : *Soit $A : \boldsymbol{R} \to \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ une application T-périodique. Il existe une application $2T$-périodique $Q : \boldsymbol{R} \to GL_n(\boldsymbol{R})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ telles que u est solution de $u'(t) = A(t)u(t)$ si et seulement si $v : t \mapsto Q(t)u(t)$ est solution de $v'(t) = Bv(t)$.*