Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2017-2018**

L3 - Mathématiques générales et applications | UE : Topologie et équations différentielles

---

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Dans cet exercice, on munit $\mathbf{R}^2$ de la norme euclidienne.

1. Les parties suivantes de $\mathbf{R}^2$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

   a) $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ *c)* $\{(x, x^2) : x \in \mathbf{R}\}$

   b) $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ *d)* $\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbf{N}^*\right\}$

2. On note $A = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0\right\}$. Montrer que A est une partie de $\mathbf{R}^2$ qui n'est ni ouverte ni fermée. Déterminer son intérieur et son adhérence.

Exercice 2. *Topologie induite*

Soit $X = \{x \in \mathbf{R} : \sin x > 0\}$, muni de la distance induite $d : X \times X \to \mathbf{R}^+,\ (x, y) \mapsto |x - y|$. On note $A =]0, \pi[$.

1. Étudier si A est un ouvert de (X, d).
2. Étudier si A est un fermé de (X, d).

Exercice 3.

1. Soit (X, d) un espace métrique, U un ouvert de X. Montrer l'inclusion $U \subset \mathring{\overline{U}}$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. On considère $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.
   (a) Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$.
   (b) Construire une partie A de $\mathbf{R}$ telle que les ensembles suivants soient deux à deux distincts : A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit A un ouvert de X et B une partie quelconque de X. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

   En utilisant des intervalles de $\mathbf{R}$, montrer que cette inclusion peut ne pas être vraie si A n'est pas ouvert.
2. Dans $\mathbf{R}$, donner des exemples d'ouverts A et B tels que les ensembles $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$ soient tous différents.

Exercice 5. On considère $X = \ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Dans cet exercice, il est commode de noter une suite réelle x de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x : \mathbf{N} &\to \mathbf{R} \\ n &\mapsto x(n). \end{aligned}$$

On munit X de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x(n)|.$$

On note $Y = \{x \in \mathbf{R}^\mathbf{N} : \lim_{n\to+\infty} x(n) = 0\}$.

1. Montrer que $Y \subset X$.
2. Montrer que Y est fermé dans $(X, \|\cdot\|_\infty)$.
3. On note Z l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que Z est dense dans Y mais que Z n'est pas dense dans X.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie A de X, on définit la distance à A par

$$d(\cdot, A) : X \to \mathbf{R},\ x \mapsto d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

1. Montrer que pour toute partie A de X, l'application $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne, *i.e.* pour tout $x \in X$, $y \in X$, on a
$$|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y).$$
2. Soit A une partie de X, $x \in X$. Montrer que x appartient à $\overline{A}$ si et seulement si on a $d(x, A) = 0$.
3. Soit A et B deux parties de X. Montrer que l'ensemble $U = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.
4. En déduire que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X, alors il existe deux parties U et V ouvertes et disjointes de X telles que $A \subset U$ et $B \subset V$.
5. *Lemme d'Urysohn.* Montrer que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X, alors il existe une application $f : X \to \mathbf{R}$ continue telle que
   (i) pour tout $x \in A$, $f(x) = 0$,
   (ii) pour tout $x \in B$, $f(x) = 1$,
   (iii) pour tout $x \in X$, $0 \le f(x) \le 1$.
   Indication : considérer f définie par $f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que tout ouvert de X peut s'écrire comme une réunion dénombrable de fermés de X.

Exercice 8. Soit (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques.

1. Soit $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ deux applications continues.
   (a) Montrer que $\Delta = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X.
   (b) Soit A une partie de X. Montrer que si A est dense dans X et si pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$ alors pour tout $x \in X$, $f(x) = g(x)$.
2. (a) Montrer que si $f : X \to Y$ est une application continue alors son graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est un fermé de $X \times Y$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?