Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2017-2018**

L3 - Mathématiques générales et applications UE : Topologie et équations différentielles

---

Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. *Équations linéaires scalaires du premier ordre*

On s'intéresse ici aux équations différentielles de la forme suivante

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad t \in I \tag{1}$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $a : I \to \mathbf{R}$ et $b : I \to \mathbf{R}$ sont deux fonctions continues sur I données. On note $A : I \to \mathbf{R}$ une primitive de a sur I.

1. Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction auxiliaire $z : t \mapsto y(t)e^{-A(t)}$, montrer que l'équation (1) admet une unique solution maximale vérifiant de plus $y(t_0) = y_0$, et que cette solution est définie sur I tout entier *i.e. elle est globale.*

   Montrer qu'elle est donnée par :

$$\forall t \in I,\ y(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} b(s)ds. \tag{2}$$

   Cette formule est appelée *formule de Duhamel.*

2. Montrer que $\mathcal{S}_0 = \{y : I \to \mathbf{R} : y \text{ dérivable},\ \forall t \in I,\ y'(t) = a(t)y(t)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$ de dimension 1, engendré par $t \mapsto e^{A(t)}$.
3. Retrouver la formule de Duhamel en utilisant la méthode de variation de la constante.
4. *Exemple.*
   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) + \frac{y(t)}{t^2} = -\frac{1}{t^3},\ t \in]0, +\infty[. \tag{3}$$

   (b) Déterminer la solution de (3) vérifiant $y(1) = 1$.

Exercice 2. On s'intéresse à l'équation différentielle suivante

$$(e^t - 1)y'(t) + e^t y(t) = 1,\ t \in I. \tag{4}$$

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Déterminer toutes les solutions maximales de (4) dans le cas où $I =]0, +\infty[$.
3. Déterminer toutes les solutions maximales de (4) dans le cas où $I =] - \infty, 0[$.
4. Existe-t-il des solutions de (4) définies sur $\mathbf{R}$?

Exercice 3. Soit $r > 0$. On considère l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = ry(t)\big(1 - y(t)\big), \ t \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Cette équation, appelée équation logistique, est utilisée pour modéliser l'évolution d'une population vivant dans un milieu à capacité limitée.

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Déterminer les solutions constantes de (5).
3. Soit $y_0 \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale y de (5) vérifiant $y(0) = y_0$. On note $]t_*, T^*[$ son intervalle de définition (t_*, T^* finis ou infinis).
4. Montrer que si $y_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 1$ alors pour tout $t \in]t_*, T^*[$, $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq 1$.
5. Calculer explicitement les solutions maximales.
6. Étudier, pour tout $y_0 \in \mathbf{R}$, le comportement de $y(t)$ quand $t \to T^*$.

Exercice 4. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x(t)^2, \ t \in \mathbf{R} \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Justifier que le problème (6) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.
3. Calculer explicitement cette solution maximale. Est-elle globale ?
4. L'équation différentielle $x'(t) = 1 + x(t)^2$ admet-elle des solutions globales ?

Exercice 5. *Équations homogènes*

1. On considère l'équation différentielle suivante :

$$u'(t) = \frac{u(t)^2 - 1}{t}, \quad t > 0. \tag{7}$$

   (a) Montrer que (7) admet deux solutions constantes, définies sur $]0, +\infty[$.

   (b) Montrer que toute solution $u : I \to \mathbf{R}$, définie sur un intervalle I, non constante vérifie : pour tout $t \in I$, $u(t) \neq -1$ et $u(t) \neq 1$. En déduire que les fonctions $u - 1$ et $u + 1$ sont de signe constant sur I.

   (c) Déterminer toutes les solutions maximales de (7).

2. On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = \frac{y(t)^2 + ty(t) - t^2}{t^2}, \quad t > 0. \tag{8}$$

   (a) Réécrire (8) sous la forme $y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$. *On dit que* (8) *est une équation différentielle homogène.*

   (b) Justifier que (8) admet une unique solution maximale vérifiant $y(1) = 2$. En posant $u : t \mapsto \frac{y(t)}{t}$, et en utilisant le résultat de la question 1, calculer explicitement cette solution.