
Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 10

Exercice 1. *Pendule simple et pendule amorti*
L'équation du pendule simple est

$$x''(t) + \sin\big(x(t)\big) = 0,\ \ t \in \mathbf{R} \tag{1}$$

et celle du pendule amorti

$$x''(t) + kx'(t) + \sin\big(x(t)\big) = 0,\ \ t \in \mathbf{R} \tag{2}$$

où $k > 0$.
On réécrit ces équations du second ordre sous la forme de systèmes de deux équations du premier ordre :

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\sin\big(x(t)\big) \end{cases} \tag{3}$$

et

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -kv(t) - \sin\big(x(t)\big) \end{cases} \tag{4}$$

avec les conditions initiales $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$, où x_0 et v_0 sont deux réels donnés.
On souhaite étudier le comportement des solutions de ces deux systèmes.

1. *Cas du pendule simple.*
   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution globale (définie sur $\mathbf{R}$ tout entier) au système (3) pour toute donnée initiale (x_0, v_0).
   (b) Déterminer les points d'équilibre de (3).
   (c) Soit (x^*, v^*) un équilibre. Peut-on conclure quant à la stabilité de cet équilibre en étudiant le système linéarisé en ce point ?
   (d) On note pour tout $(x, v) \in \mathbf{R}^2$, $H(x, v) = \frac{1}{2}v^2 - \cos x$.
   Montrer que si $t \mapsto (x(t), v(t))$ est solution de (3), $t \mapsto H(x(t), v(t))$ est constante. Autrement dit, H est une intégrale première pour (3).
   (e) Tracer le portrait de phase du pendule simple. *On pourra étudier les ensembles de niveau de* H *:* $\mathcal{E}_a = \{(x, v) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, H(x, v) = a\}$ *pour* $a \in \boldsymbol{R}$.
   (f) Décrire le comportement des solutions de (3) en fonction de la valeur initiale de l'hamiltonien $H(x_0, v_0)$.
2. *Cas du pendule amorti.*
   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution globale (définie sur $\mathbf{R}$ tout entier) au système (4) pour toute donnée initiale (x_0, v_0).
   (b) Montrer que si $t \mapsto (x(t), v(t))$ est solution de (4), alors $t \mapsto H(x(t), v(t))$ est décroissante.
   (c) Montrer que l'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable pour (4), *i.e.* pour des données initiales (x_0, v_0) dans un voisinage de $(0, 0)$, les solutions associées $(x(t), v(t))$ convergent vers $(0, 0)$ quand $t \to +\infty$.
   (d) Montrer que le système (4) n'admet pas de solutions périodiques non constantes.

Exercice 2.

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) &= \quad x(t)\big(1-(x(t)^2+y(t)^2)\big)+y(t), \\ y'(t) &= -x(t)+y(t)\big(1-(x(t)^2+y(t)^2)\big). \end{cases} \quad t \in \mathbf{R} \tag{5}$$

1. Montrer que le système (5) admet $(0,0)$ comme unique équilibre.
2. Étudier la stabilité de cet équilibre.
3. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Justifier l'existence d'une unique solution maximale (x, y) à (5) vérifiant $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$, définie sur un intervalle ouvert J.
4. Montrer que si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ alors pour tout $t \in J$, $(x(t), y(t)) \neq (0,0)$.
5. On suppose désormais $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. On définit

   $$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}, \quad \text{pour tout } t \in J.$$

   Montrer que r est solution du problème de Cauchy

   $$\begin{cases} r'(t) &= r(t)\big(1-r(t)^2\big), \ t \in \mathbf{R} \\ r(0) &= r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2}. \end{cases} \tag{6}$$

6. En séparant les cas $r_0 = 1$, $r_0 \in]0,1[$, et $r_0 > 1$, étudier le comportement qualitatif de la solution de (6). *On justifiera en particulier que r est définie jusqu'en $+\infty$, on étudiera sa monotonie, et sa limite quand $t \to +\infty$.*
7. En déduire que J contient $[0, +\infty[$ et que $\lim_{t\to+\infty} x(t)^2 + y(t)^2 = 1$.
8. Pour compléter l'étude, on écrit la solution en polaires : pour tout $t \in J$,

   $$x(t) = r(t)\cos(\theta(t)), \ y(t) = r(t)\sin(\theta(t)),$$

   où $\theta : J \to \mathbf{R}$. On suppose que θ est dérivable sur J. Montrer que pour tout $t \in J$,

   $$\theta'(t) = -1$$

9. Décrire le comportement des solutions de (5) quand $t \to +\infty$ suivant les valeurs de (x_0, y_0). Dessiner quelques orbites représentatives dans le plan de phase (x, y).