

Convergence monotone. Convergence dominée  
Feuille 6

**Intégration**

**Exercice 1** Soit  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. Si  $f = \mathbf{1}_A$  avec  $A \in \mathcal{T}$ , alors  $\int f \, d\mu = \mu(A)$ .
2. Si  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  est mesurable et satisfait à  $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ , alors  $f$  est intégrable.
3. Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

**Exercice 2** Écrire de manière plus simple la quantité  $\int f \, d\mu$  lorsque :

1.  $\mu$  est une mesure de Dirac.
2.  $\mu$  est la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$ .

**Exercice 3** Soit  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré et soit  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  une application mesurable. Montrer que :

1.  $\int_X f \, d\mu < \infty \implies f < \infty \mu\text{-p. p.}$
2.  $\int_X f \, d\mu = 0 \implies f = 0 \mu\text{-p. p.}$

**Exercice 4** On considère la fonction  $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{si } \cos x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, & \text{si } \cos x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est Lebesgue-intégrable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
2. Calculer l'intégrale de Lebesgue  $\int_0^{\pi/2} f(x) \, dx$ .

**Théorème de convergence monotone**

**Exercice 5** Soit  $\mu$  une mesure sur  $(X, \mathcal{T})$  et soit  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  une application mesurable.

1. Soit  $A = \{x \in X ; f(x) \geq 1\}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f^n \, d\mu$ .
2. On suppose  $\int_X f \, d\mu < \infty$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A^c} f^n \, d\mu$ .

**Exercice 6** Soit  $\mu$  une mesure sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telle que  $\mu(\mathbb{R}) = 1$ .

1. Soit  $(f_n)$  une suite décroissante de fonctions boréliennes et positives qui converge simplement vers  $f$ . On suppose que  $f_0$  est intégrable (c'est-à-dire que  $\int f_0 \, d\mu < \infty$ ).
  - (a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$ .
  - (b) Donner un contre-exemple si l'on ne suppose pas que  $f_0$  est intégrable.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_{\mathbb{R}} (\cos \pi t)^{2n} d\mu(t)$ .

2. Montrer que  $I_n < \infty$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Montrer que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
4. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

**Exercice 7** Soit  $\mu$  une mesure sur  $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$  telle que  $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$ . Pour  $x \geq 0$ , on pose  $F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} d\mu(t)$ .

1. Montrer que la fonction  $F$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ .
2. Montrer que la fonction  $F$  est décroissante.
3. Soit  $(x_n)$  une suite croissante de réels positifs tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ .  
Conclusion ?

### Exercice 8

1. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , soit  $(a_{n,k})_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite telle que :

(H1)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, a_{n,k} \geq 0$ ;

(H2) pour tout entier  $n$  fixé, la suite  $(a_{n,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n,k}$ . Montrer que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

2. Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable. Soit  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de mesures sur  $\mathcal{T}$  telles que :

(H) pour tout  $A \in \mathcal{T}$ , la suite  $(\mu_k(A))_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante.

Pour  $A \in \mathcal{T}$ , on note  $\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(A)$ .

En utilisant la question 1, montrer que  $\mu$  est une mesure sur  $\mathcal{T}$ .

3. On garde les hypothèses de la question 2. Montrer que pour toute fonction  $\mathcal{T}$ -mesurable  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ , la suite  $(\int f d\mu_k)$  est croissante (on pourra commencer par le cas où  $f$  est étagée).
4. On garde les hypothèses de la question 2. Montrer que pour toute fonction  $\mathcal{T}$ -mesurable  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\mu_k = \int f d\mu.$$

On pourra commencer par le cas où  $f$  est étagée.

### Exercice 9

1. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions boréliennes positives de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \right) dx.$$

2. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=3}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

**Exercice 10** Déterminer, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left( x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx.$$

**Exercice 11** Soient  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable.

1. On suppose que  $\mu$  est finie. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $X_n = f^{-1}([n, n+1[)$ . Montrer que  $f$  est  $\mu$ -intégrable si et seulement si  $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(X_n) < \infty$ .
2. On ne suppose plus que  $\mu$  est finie. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , soit  $F_n = f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$ . Montrer que  $f$  est  $\mu$ -intégrable si et seulement si  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(F_n) < \infty$ .

**Théorème de convergence dominée**

**Exercice 12** Calculer la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x^3} dx.$$

[Indication : Comment majorer  $\sin u$  quand  $u$  est proche de 0 ?]

**Exercice 13** Soient  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mu$ -intégrable.

1. Pour  $n \geq 0$ , soit  $A_n = \{x \in X ; |f(x)| \geq n\}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f d\mu$ .
2. On suppose de plus que  $f$  est à valeurs strictement positives. On fixe  $A \in \mathcal{F}$  tq  $\mu(A) < \infty$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f^{1/n} d\mu$ .

**Exercice 14** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\lambda$ -intégrable. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \exp(-n \sin^2 x) f(x) dx.$$

**Exercice 15** Soit  $\mu$  une mesure sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telle que  $\mu(\mathbb{R}) = 1$  et que la fonction  $t \mapsto \exp(a|t|)$  soit intégrable pour tout  $a \geq 0$ .

1. Donner deux exemples « différents ».
2. Montrer que  $t \mapsto t^n$  est  $\mu$ -intégrable pour tout entier positif  $n$ .
3. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $t \mapsto \exp(zt)$  est  $\mu$ -intégrable.
4. On pose  $F(z) = \int_{\mathbb{R}} \exp(zt) d\mu(t)$ . Montrer que  $F$  admet un développement en série entière de la forme

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

où l'on explicitera les coefficients  $(a_n)$ .

**Exercice 16** Soit  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré ; on suppose la mesure  $\mu$  finie. Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction  $\mathcal{F}$ -mesurable et, pour  $n \geq 1$ ,  $I_n = \int_X \frac{f^n}{1+f^n} d\mu$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

**Exercice 17** Soit  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite décroissante de fonctions  $\mu$ -intégrables qui converge vers 0  $\mu$ -p. p. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_X f_n d\mu = \int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n \right) d\mu.$$

On pourra utiliser la preuve du théorème de Leibniz sur les séries alternées.

**Exercice 18** On considère pour  $n$  entier,  $n \geq 2$ , la fonction  $f_n : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}.$$

1. Montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,  $f_n$  est Lebesgue-intégrable sur  $]0, \infty[$ .
2. Démontrer que pour  $n \geq 2$  et  $x \geq 1$ , on a  $f_n(x) \leq \frac{4}{x^2}$ .
3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx$ .

**Exercice 19** Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout réel  $x$ , on pose  $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ .

1. Montrer que  $\sum f_n(x)$  est une série convergente pour tout  $x > 0$  et calculer sa somme  $f(x)$ .
2. Comparer  $\int_{\mathbb{R}_+} f(x) dx$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) dx$ . Expliquer.

**Exercice 20** On munit l'espace  $[0, 1]$  de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1. Soit  $(f_n)_{n \geq 2}$  une suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ -n^2(x - 2/n) & \text{si } 1/n < x \leq 2/n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer et comparer  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda$ ,  $\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda$  et  $\int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda$ .

2. Même question avec la suite de fonctions  $(g_n)$  définie par  $g_{2p} = \mathbf{1}_{[0, 1/(2p)]}$ ,  $g_{2p+1} = \mathbf{1}_{[1/(2p+1), 1]}$ .

**Exercice 21**

1. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$  est Lebesgue-intégrable sur  $[0, \infty[$ .
2. Montrer que pour tout  $x > 0$  on peut écrire  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin x$ . Et pour  $x = 0$  ?
3. En déduire que  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ .

**Exercice 22** Soient  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application intégrable. Montrer le lemme de Lebesgue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } [\forall A \in \mathcal{F}, \mu(A) \leq \delta] \implies \int_A f d\mu \leq \varepsilon.$$

[Indications. Établir ce résultat quand  $f$  est de plus bornée. Puis introduire  $f_n = \min(f, n)$ .]

**Exercice 23** Dans cet exercice,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ , muni de sa tribu borélienne.

1. On suppose  $I = ]0, 1[$ . Soit  $0 < \alpha < \infty$ . À quelle condition la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est-elle intégrable sur  $I$  ?
2. Même question avec  $I = [1, \infty[$  et  $I = ]0, \infty[$ .
3. Dans la suite de l'exercice, on suppose  $I = ]0, \infty[$ , et on considère la fonction  $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ . Montrer que  $f$  n'est pas intégrable sur  $I$ .
4. On introduit  $f_n = f \cdot \mathbf{1}_{]0, n]}$ ; montrer que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , que chaque  $f_n$  est intégrable sur  $I$  et que  $\int_I f_n d\lambda$  a une limite quand  $n \rightarrow \infty$ .
5. Conclusion ?

**Exercice 24** Montrer que les fonctions suivantes sont  $\lambda$ -intégrables sur  $I$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n d\lambda$ .

1.  $I = [0, 1]$  et  $f_n(x) = \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha}$ , où  $1 < \alpha < 2$ .
2.  $I = [A, \infty[$  (avec  $A > 0$ ) et  $f_n(x) = \frac{n^2 x \exp(-n^2 x^2)}{1 + x^2}$ .
3.  $I = [0, 1]$  et  $f_n(x) = \sqrt{n} \mathbf{1}_{[1/n, 2/n]}(x)$ .

**Exercice 25** On pose  $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx) \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ .

1. Déterminer la limite simple (notée  $f$ ) de la suite  $(f_n)$ .
2. Montrer que  $e^{-u} \geq 1 - u$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ .
3. En déduire que la suite  $\left( \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .