Université Lyon 1 Licence de Mathématiques 3e année
Mesure et intégration Année 2017-2018

Mesures boréliennes. Mesure de Lebesgue

Feuille 5

Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle les définitions suivantes.

1. une partie A de E est μ-négligeable s'il existe $B \in \mathscr{T}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.
2. une propriété $P(x)$ est vraie μ-presque partout (μ-p. p.) si la partie $\{x \in E\,;\, P(x) \text{ est fausse}\}$ est μ-négligeable.

On désigne par λ (ou λ_1) la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et par λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Propriétés élémentaires de la mesure de Lebesgue

Exercice 1 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Si A est une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$ et $\lambda(A) > 0$, alors il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}$ tel que $U \subset A$. Et réciproquement ?
2. Si $B \subset \mathbb{R}$ est une partie Lebesgue-mesurable, et si $A \subset B$, alors A est Lebesgue-mesurable.
3. Si A est une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$ et si $\lambda(A) < \infty$, alors A est bornée.

Exercice 2 Soit μ est une mesure borélienne sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant les conditions suivantes : μ est diffuse, et la mesure d'un intervalle compact est finie.

1. La mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ vérifie-t-elle ces conditions ? Et la mesure de Dirac δ_0 ?
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\right)$.
3. Montrer que $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.
4. Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. On définit
$$f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad x \overset{f_A}{\longmapsto} f_A(x) = \mu(A \cap [-|x|, |x|]).$$
Pourquoi la fonction f_A est-elle bien définie ? Calculer $f_A(x)$ pour $A = \mathbb{Q}$.
5. On suppose dans cette question que $\mu = \lambda$. Représenter graphiquement l'allure de f_A pour $A = \mathbb{R}$. Même question pour $A = [0, 1]$.
6. On revient au cas général. Montrer que f_A est continue. En déduire que, si $\mu(A) > 0$, alors pour tout $t \in]0, \mu(A)[$ il existe un borélien $B \subset A$ tel que $\mu(B) = t$.

Les classiques

Exercice 3 Le but de cet exercice est de donner une définition équivalente de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ comme la (complétée de la) seule mesure borélienne normée et invariante par translations.

Rappelons que, si $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, alors $x + A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ (feuille 2, exercice 10).

1. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Soit $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ définie par $\mu(A) = \lambda(x + A)$ pour $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. On dit que la mesure de Lebesgue est invariante par translation.

3. Inversement, soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$, invariante par translations et telle que $\mu([0,1[) = 1$. Calculer $\mu\left(\left[0, \frac{1}{n}\right[\right)$. Déterminer la mesure d'un intervalle arbitraire. Montrer que $\mu = \lambda$.
4. Prouver ou réfuter. Une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$, invariante par translations, est un multiple de la mesure de Lebesgue.
5. Proposer une caractérisation de λ_n, avec une esquisse de preuve.

Exercice 4

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.
2. Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f = g \ \lambda - \text{p. p.} \iff f = g$. De même pour $f, g : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $A \subset \overline{\mathring{A}}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère les deux propriétés suivantes.
(P1) f est continue λ-p. p.
(P2) Il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f = g$ λ-p. p.
Montrer que (P1) n'implique pas (P2), et que (P2) n'implique pas (P1).
4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(U) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 5 Le but de cet exercice est d'aboutir à l'existence d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ qui ne soit pas Lebesgue mesurable. En particulier, A ne sera pas borélienne.

1. Soit B une partie de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $b \in B$ tel que $x - b \in \mathbb{Q}$. Montrer que si B est Lebesgue-mesurable alors $\lambda(B) > 0$.
2. Soit B une partie de $[0,1]$ telle que $[x, y \in B,\ x \neq y] \implies x - y \notin \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de translatées de B incluses dans $[0,2]$ et deux à deux disjointes. En déduire que si B est Lebesgue-mesurable alors $\lambda(B) = 0$.
3. Que peut-on dire d'une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés ci-dessus ? De quelle façon peut-on obtenir une telle partie de $\mathbb{R}$?

Exercice 6 Soit (X, d) un espace métrique. Une mesure borélienne μ est « régulière » si

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\,;\ K \subset A \text{ compact}\} = \inf\{\mu(U)\,;\ U \supset A \text{ ouvert}\}.$$

Un théorème général affirme : si X est l'union d'une suite de compacts (on dit alors que X est « σ-compact »), et si la mesure de tout compact est finie, alors μ est régulière.

En particulier, la mesure de Lebesgue est régulière (pourquoi ?).

Ici, nous nous proposons de montrer une partie de ce résultat.

1. Dans cette question, μ borélienne sur $\mathbb{R}$, diffuse et finie. On définit un ensemble
$$\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\,;\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, F \text{ fermé}, \exists\, O \text{ ouvert avec } F \subset A \subset O \text{ et } \mu(O \setminus F) < \varepsilon\}\ .$$
   (i) Montrer que pour tout $a < b \in \mathbb{R}$ on a $]a, b[\in \mathscr{T}$.
   (ii) Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu ; en déduire que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est contenue dans $\mathscr{T}$.
   (iii) Conclure à la régularité de μ.
2. On suppose cette fois que μ est une mesure diffuse sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ telle que pour tout intervalle borné $[a, b]$ on ait $\mu([a, b]) < \infty$, et on fixe $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
   (i) Pour $B, C \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ on pose $\nu_B(C) = \mu(C \cap B)$. Montrer que ν_B est une mesure (finie si B est bornée).
   (ii) On définit $A_n = A \cap [n, n+1[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $O_{n,\varepsilon}$ contenant A_n et tel que $\mu(O_{n,\varepsilon}) < \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}$. [Indication : utiliser ν_{B_n} pour un ouvert B_n bien choisi.]

(iii) Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert O_ε tel que $A \subset O_\varepsilon$ et $\mu(O_\varepsilon) \leq \mu(A) + \varepsilon$.

(iv) Conclusion ?

(v) Esquisser la preuve de la régularité de μ.

3. Et si on renonce à l'hypothèse μ diffuse ?