

Mesures
Feuille 4

Nous travaillons dans un espace mesuré (X, \mathcal{F}, μ) .

Propriétés élémentaires des mesures

Exercice 1 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Si $A \in \mathcal{F}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
2. Si (A_n) est une suite décroissante d'éléments de \mathcal{F} et $\mu(A_2) < \infty$, alors $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
3. Une réunion de parties de mesure nulle est de mesure nulle.
4. Si $A, B \in \mathcal{F}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.
5. Il existe un espace mesuré (X, \mathcal{F}, μ) tel que $\{\mu(A); A \in \mathcal{F}\} = \{0, 1, 2\}$.
6. Il existe un espace mesuré (X, \mathcal{F}, μ) tel que $\{\mu(A); A \in \mathcal{F}\} = \{0, 1, 3\}$.
7. La mesure de comptage sur \mathbb{N} est σ -finie.
8. Soit \mathcal{C} une famille qui engendre \mathcal{F} , et μ_1, μ_2 deux mesures sur \mathcal{F} . On suppose que pour tout C dans \mathcal{C} on a $\mu_1(C) = \mu_2(C)$. Alors pour tout T dans \mathcal{F} on a $\mu_1(T) = \mu_2(T)$.
Y a-t-il des hypothèses raisonnables à ajouter ou enlever ?

Exercice 2 On rappelle que μ est σ -finie s'il existe une suite (A_n) d'éléments de \mathcal{F} telle que $\bigcup_n A_n = X$ et $\mu(A_n) < \infty$ pour tout n . Montrer que si tel est le cas, alors on peut choisir les A_n deux à deux disjoints.

Exercice 3 Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Trouver une suite décroissante d'ensembles (A_n) telle que $\mu(A_n) \not\rightarrow \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.

Exercice 4 On suppose $\mu(X) < \infty$. Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{F}; \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = \mu(X)\}.$$

Montrer que \mathcal{S} est une tribu.

Inégalités

Exercice 5 Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite *quelconque* de parties mesurables de X . Etablir les encadrements suivants :

1. $\sup_{n \geq 1} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
2. $0 \leq \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) \leq \inf_{n \geq 1} \mu(A_n)$.

Montrer les implications suivantes :

3. $[\mu(A_n) = 0, \forall n] \implies \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = 0.$

4. Si $\mu(X) < \infty$ et si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de sous ensembles de X tels que $\mu(X_n) = \mu(X)$ pour tout n , alors on a $\mu\left(\bigcap_{n \geq 0} X_n\right) = \mu(X).$

Et sans l'hypothèse $\mu(X) < \infty$?

Exercice 6

1. Soient A et B deux parties mesurables telles que l'une d'elles soit de mesure finie. Montrer que $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B).$
2. Soient A et B deux parties mesurables telles que $\mu(A) + \mu(B) > \mu(X).$ Montrer que $A \cap B \neq \emptyset.$
3. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie de parties mesurables telle que $\bigcup_{i=1}^n A_i = X.$ Montrer qu'il existe un indice j tel que $\mu(A_j) \geq \frac{\mu(X)}{n}.$

Exercice 7

1. Rappeler le principe d'inclusion-exclusion.
2. Etablir l'analogie de ce principe pour des mesures finies, resp. pour des mesures quelconques.

Mesures discrètes

Exercice 8 Soit \mathcal{T} une tribu contenant les singletons. Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{T}).$ On note $D = \{x \in X; \mu(\{x\}) > 0\}.$ Est-il vrai que D est a. p. d.

1. Si μ est finie ?
2. Si μ est σ -finie ?
3. Si μ est quelconque ?

Exercice 9 On suppose que $\{x\} \in \mathcal{T}$ et $\mu(\{x\}) < \infty, \forall x \in X.$ On dit que μ est « diffuse » (ou « continue ») si, pour tout $x \in X, \mu(\{x\}) = 0.$ On dit que μ est « discrète » s'il existe un ensemble D au plus dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0.$

1. Montrer que μ est diffuse ssi toute partie a. p. d. A de X est μ -négligeable.
2. Montrer que μ est discrète ssi il existe une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ de points de X et une suite $(c_n)_{n \geq 1}$ de réels positifs telles que $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{a_n}.$
3. On suppose maintenant μ σ -finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d,$ où μ_c est une mesure diffuse et μ_d est une mesure discrète.

Measure image

Exercice 10 Soient (X, \mathcal{T}) et (Y, \mathcal{S}) des espaces mesurables, et $f : X \rightarrow Y$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathcal{T}.$ On définit $f_*\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ par $f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{S}.$

1. Montrer que $f_*\mu$ est une mesure sur $\mathcal{S}.$ C'est la « mesure image » de μ par $f.$
2. On choisit $\mu = \delta_a,$ où $a \in X.$ Déterminer $f_*\delta_a.$
3. On suppose que μ est une mesure sur \mathcal{T} vérifiant $\mu(X) = 1.$ On fixe $B \in \mathcal{S}$ et on choisit $(Y, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$ Déterminer $(\chi_B)_*\mu.$

Théorème du retour de Poincaré

Exercice 11 On suppose $\mu(X) < \infty$. Une application mesurable $f : X \rightarrow X$ « préserve la mesure μ » si $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, $\forall A \in \mathcal{F}$. Pour un tel f , on considère la suite $(f^n)_{n \geq 1}$ des itérés de f : $f^1 = f$ et $f^{n+1} = f^n \circ f$, $\forall n \geq 1$.

1. Montrer que f^n préserve μ pour tout $n \geq 1$.
2. On fixe $A \in \mathcal{F}$. Soit $F := \{x \in A; f^n(x) \notin A, \forall n \geq 1\}$. Montrer que $F \in \mathcal{F}$.
3. Pour $p \geq 1$, soit $F_p = (f^p)^{-1}(F)$. Montrer que les ensembles (F_p) sont deux à deux disjoints.
4. En déduire le (premier) théorème du retour de Poincaré : pour μ -presque tout $x \in A$, il existe $n = n(x) \geq 1$ tel que $f^n(x) \in A$.

Mesures boréliennes vs fonctions càdlàg

Exercice 12 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $F(t) = \mu(] - \infty, t])$.

1. Montrer que F est à valeurs dans $[0, 1]$, croissante, et que $F(t) \rightarrow 0$ (resp. $F(t) \rightarrow 1$) quand $t \rightarrow -\infty$ (resp. $t \rightarrow \infty$).
2. Montrer que F est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point. Doux acronyme : F est « càdlàg ».
3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que F soit continue sur \mathbb{R} .
4. Uniquement dans cette question, on suppose F est continue.
 - (a) Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $F^{-1}(\{x\})$ est un intervalle compact non vide de \mathbb{R} . On note cet intervalle $[s_x, t_x]$.
 - (b) Montrer que $t < s_x$ si et seulement si $F(t) < x$.
 - (c) Soit $\nu = F_*\mu$ la mesure image de μ par l'application F . Que vaut $\nu(] - \infty, x])$ pour $x \in \mathbb{R}$?
 - (d) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un segment $I \subset [a, b]$, de longueur $\frac{1}{2}(b - a)$ et tel que $\mu(I) = \frac{1}{2}\mu([a, b])$.
5. Réciproquement, on suppose que F est càdlàg, et que $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$, resp. $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$. Alors il existe une mesure borélienne μ telle que $F(t) = \mu(] - \infty, t])$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ce résultat sera admis (voir par ex. livre Intégration, André Gramain, section VI.5). Montrer, plus modestement, l'unicité de μ .

6. Trouver μ dans le cas particulier où $F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0 \\ t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1. \\ 1, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$