Université Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de Mathématiques 3[e] année
Année 2017-2018

Tribus
Feuille 2

Propriétés élémentaires des tribus

Exercice 1 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Un ouvert ou un fermé est un borélien.
2. Un borélien est un ouvert ou un fermé.
3. Un intervalle est dans $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
4. Si X est dénombrable, alors toute tribu sur X est finie ou dénombrable.
5. Une partie $\mathscr{T}$ de $\mathscr{P}(X)$ est une tribu si elle vérifie :
   (a) $\emptyset \in \mathscr{T}$.
   (b) $A \in \mathscr{T} \implies A^c \in \mathscr{T}$.
   (c) $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathscr{T} \implies \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$.

Exercice 2 Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathscr{T} = \{A \subset \mathbb{R}\,;\, A \text{ au plus dénombrable ou } A^c \text{ au plus dénombrable}\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathscr{T} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.
4. Question plus difficile : même conclusion si on remplace $\mathbb{R}$ par tout ensemble non dénombrable.

Engendrement

Exercice 3 Montrer que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par une famille dénombrable.

Exercice 4 Déterminer les tribus engendrées par les familles suivantes.

1. $\mathscr{A} = \{A\}$, avec $A \subset X$ fixé.
2. $\mathscr{A} = \{A \subset X\,;\, A_0 \subset A\}$, avec $A_0 \subset X$ fixé.

Exercice 5 Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Si $A \in \sigma(\mathscr{A})$, montrer qu'il existe une partie au plus dénombrable $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ telle que $A \in \sigma(\mathscr{B})$. [Indication : on pourra considérer

$$\mathscr{C} = \{A \in \sigma(\mathscr{A})\,;\, \exists\, \mathscr{B} \subset \mathscr{A} \text{ au plus dénombrable telle que } A \in \sigma(\mathscr{B})\}.]$$

Exercice 6 Un espace métrique (X, d) est *σ-compact* s'il existe une suite de compacts $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $X = \displaystyle\bigcup_{j\geq 0} K_j$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^n$ est σ-compact.
2. Montrer que si X est σ-compact, alors $\mathscr{B}(X)$ est engendrée par les compacts de X.

Tribus et partitions

Exercice 7 Nous nous proposons de décrire toutes les tribus au plus dénombrables $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$. Pour $x \in X$, soit $A_x := \bigcap_{x \in A \in \mathscr{T}} A$.

1. Montrer que $A_x \in \mathscr{T}$.
2. Montrer que, pour tout $x, y \in X$: ou bien $A_x = A_y$, ou bien $A_x \cap A_y = \emptyset$.
3. En déduire que les A_x engendrent une partition au plus dénombrable $X = \bigsqcup_{i \in I} B_i$ de X.
4. Montrer que $\mathscr{T} = \left\{ \bigcup_{i \in J} B_i \, ; \, J \subset I \right\}$.
5. Application : décrire les tribus d'un ensemble à 1, 2, 3 ou 4 éléments.

Exercice 8

1. Soit $X = \bigsqcup_{i \in I} B_i$ une partition de X (pas forcément finie ou dénombrable). Déterminer la tribu engendrée par la famille $(B_i)_{i \in I}$. Cas particulier : $I = X$ et $B_x = \{x\}$.
2. Application : montrer que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ n'est pas engendrée par une partition de $\mathbb{R}$.

Union de tribus

Exercice 9

1. Montrer que l'union de deux tribus n'est pas forcément une tribu.
2. Bien sûr, l'union d'un nombre fini de tribus ordonnées est une tribu (pourquoi ?). Ce résultat ne passe pas à une union infinie. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{T}_n$ la tribu sur $\mathbb{N}$ engendrée par $\mathscr{P}\big(\{0, \ldots, n\}\big)$. Montrer que $(\mathscr{T}_n)$ est une suite croissante de tribus sur $\mathbb{N}$, mais que $\bigcup_{n \geq 0} \mathscr{T}_n$ n'est pas une tribu.

limsup, liminf d'ensembles

Exercice 10 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble X. On souhaite définir leurs limite inférieure et supérieure $A := \liminf_{n \to \infty} A_n$ et $B := \limsup_{n \to \infty} A_n$ par $\chi_A := \liminf_{n \to \infty} \chi_{A_n}$ et $\chi_B := \limsup_{n \to \infty} \chi_{A_n}$.

1. Montrer que les définitions ont un sens.
2. Montrer que $x \in A \iff \exists\, n_0$ tq $\forall n \geq n_0 : x \in A_n$.
3. Montrer que $x \in B \iff \exists$ une infinité de n tq $x \in A_n$.
4. Utiliser les deux points précédents pour exprimer A et B en fonction de A_n en utilisant les opérations $\cup$ et $\cap$.
5. Trouver une condition nécessaire pour avoir $A = B$. Si cette condition est satisfaite, alors on écrit $A = B = \lim_{n \to \infty} A_n$.
6. Soit $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ une tribu. Si $A_n \in \mathscr{T}$ pour tout n, montrer que A et B appartiennent à $\mathscr{T}$.

Exercice 11 **Exemples.** Déterminer les limites supérieure et inférieure des suites suivantes :

1. $A_n =]-\infty, a_n]$ avec $a_n \in \mathbb{R}$;
2. $A_{2n} = [-1, 2 + n^{-1}[$ et $A_{2n+1} =]-2 - n^{-1}, 1]$;
3. $A_{2n} = A_2$ et $A_{2n+1} = A_1$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 12 On se donne deux parties B et C de E et deux suites $(B_n)_{n\geq 1}$ et $(C_n)_{n\geq 1}$ de parties. On suppose que la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est croissante et tend vers B et que la suite $(C_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et tend vers C, c'est-à-dire que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n \subset B_{n+1} \text{ et } C_{n+1} \subset C_n \ ; \ \bigcup_{n\geq 1} B_n = B \text{ et } \bigcap_{n\geq 1} C_n = C.$$

On pose alors pour tout n : $A_{2n} = B_n$ et $A_{2n+1} = C_n$. Identifier $\limsup_{n\to\infty} A_n$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n$. Quand a-t-on $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$?

Exercice 13 Soit $E = [0, 1[$. Vérifier qu'on peut écrire tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ de façon unique sous la forme $n = 2^m + p$ avec $m \geq 0$ et $0 \leq p < 2^m$. On pose alors

$$A_n = \left[\frac{p}{2^m}, \frac{p+1}{2^m}\right[.$$

Déterminer $\limsup_{n\to\infty} A_n$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n$.

Exercice 14 Soient (A_n) et (B_n) deux suites de parties d'un ensemble X.

1. Montrer que le complémentaire de la limite supérieure est la limite inférieure des complémentaires.
2. Comparer $\liminf_{n\to\infty}(A_n \cup B_n)$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n \cup \liminf_{n\to\infty} B_n$. Donner un exemple de suites telles que
$$\liminf_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) \neq \liminf_{n\to\infty} A_n \cup \liminf_{n\to\infty} B_n.$$
3. Montrer que $\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \setminus \left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \subset \limsup_{n\to\infty}(A_n \triangle A_{n+1})$.

Invariances de la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$

Exercice 15

1. Soient (X, d), (Y, δ) espaces métriques, et soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme (càd Φ est bijectif, et Φ et Φ^{-1} sont continus). Montrer que, pour $A \subset X$, on a $A \in \mathscr{B}(X) \iff \Phi(A) \in \mathscr{B}(Y)$.
2. Montrer que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ est invariante par isométries : si R est une isométrie de $\mathbb{R}^n$, alors $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \implies R(A) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Cas particulier : la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ est invariante par translation.
3. Montrer que $\{B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \, ; \, B = -B\}$ est une tribu.

Ensembles associés aux fonctions

Exercice 16 Soit (X, d) un espace métrique. Soient $f_k, f : X \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue en $x \in X \iff \forall \varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que $\forall y, z \in V : |f(y) - f(z)| < \varepsilon$.
2. En déduire que $\{x \in X \, ; \, f \text{ continue en } x\}$ est un borélien.
3. Si les f_n sont boréliennes, alors $\{x \in X \, ; \, (f_n(x)) \text{ converge}\}$ est un borélien.