Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e anné
Mesure et intégration — Année 2017-2018

Feuille de TD numéro 1

Bornes supérieures, suites, ensembles, fonctions, dénombrabilité

NB Il vaut mieux traiter les exercices dans l'ordre, qui est cohérent avec celui du cours. De plus, les notations se propagent souvent d'un exercice à l'autre.

Valeurs d'adhérence d'une suite, bornes/limites supérieures/inférieures

Exercice 1 Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\frac{\pi}{2})$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{12n+10^{-n}}{3n+2}$;
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1+\sin(n\frac{\pi}{2}))\ln(n)$;
5. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(1+(-1)^n)$.

Exercice 2 **Préambule.** Pour la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue, il est utile d'étendre les notions de borne supérieure et de borne inférieure à des ensembles non majorés ou non minorés, et même à des ensembles contenant $+\infty$ ou $-\infty$.
Définitions. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (ensemble appelé *droite réelle achevée*) : la relation d'ordre $\leqslant$ définie sur $\mathbb{R}$ s'étend à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $-\infty \leqslant x$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$ et $x \leqslant +\infty$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$ (bien sûr, pour tout réel x on a en fait les inégalités strictes $-\infty < x < +\infty$, mais «qui peut le plus peut le moins» !). Les majorants et minorants des sous-ensembles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont définis comme dans $\mathbb{R}$: si $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, un *majorant* de A est un élément M de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $a \leqslant M$ pour tout $a \in A$, et un *minorant* de A est élément m de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $m \leqslant a$ pour tout $a \in A$.

Notez que $+\infty$ est un majorant de tout sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$, et que $-\infty$ est un minorant de tout sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ non vide, on voudrait définir $\sup E$ comme le plus petit de ses majorants dans $\overline{\mathbb{R}}$, autrement dit le *plus petit élément* de l'ensemble

$$A = \{M \in \overline{\mathbb{R}}\,;\, M \text{ est un majorant de } E \text{ dans } \overline{\mathbb{R}}\}$$

(on rappelle que le plus petit élément de A est par définition un minorant de A qui appartient à A).

1. Vérifier que $\sup E$ est bien défini et que, plus précisément, si E est majoré $\sup E$ est la borne supérieure usuelle de E (dont l'existence découle de l'*axiome de la borne supérieure* dans $\mathbb{R}$) et si E n'est pas majoré $\sup E = +\infty$.
2. Proposer une définition analogue pour $\inf E$.
3. Si X est un sous-ensemble non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, montrer que l'ensemble

$$A = \{M \in \overline{\mathbb{R}}\,;\, M \text{ est un majorant de } X \text{ dans } \overline{\mathbb{R}}\}$$

admet un unique plus petit élément. On définit alors $\sup X$ comme cet élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

4. Proposer une définition analogue pour $\inf X$.

Exercice 3 **Préambule.** Pour la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue, il est utile d'étendre les notions de limite supérieure et de limite inférieure à des suites pouvant prendre la valeur $+\infty$ ou $-\infty$. Pour ce faire on va reprendre les notations et définitions introduites dans l'exercice précédent. On prolonge l'addition à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant : $x + (+\infty) = +\infty$ quel que soit $x \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{-\infty\}$ et $x + (-\infty) = -\infty$ quel que soit $x \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{+\infty\}$. On pose de plus $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ a une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si l'une des trois propriétés suivantes est vérifiée.

— la limite ℓ est réelle et quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$;

— la limite ℓ vaut $+\infty$ et pour tout $R \in \mathbb{R}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $u_n \geqslant R$;

— la limite ℓ vaut $-\infty$ et et pour tout $R \in \mathbb{R}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $u_n \leqslant R$.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose
$$x_n^- = \inf\{x_k \,;\ k \geqslant n\}, \quad x_n^+ = \sup\{x_k \,;\ k \geqslant n\}.$$
Ceci définit des suites $(x_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer qu'elles ont chacune une unique limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2. On définit la limite supérieure de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme
$$\overline{\lim}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim(x_n^+)_{n\in\mathbb{N}},$$
qu'on pourra aussi noter $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$. Définir de manière analogue la limite inférieure $\underline{\lim}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour simplifier, on omet souvent d'écrire $n \in \mathbb{N}$ en indice, et on écrit aussi $\limsup(x_n)$ la limite supérieure et $\liminf(x_n)$ la limite inférieure, ou encore $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.
3. Montrer les propriétés générales suivantes :
   (a) $\inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.
   (b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$, alors $\ell = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.
   (c) Réciproquement, si $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$, alors (x_n) a pour limite ℓ.
4. Donner des exemples de suites (x_n) et (y_n) avec $\limsup(x_n + y_n) \neq \limsup(x_n) + \limsup(y_n)$.
5. Relier la limite supérieure de la somme de deux suites à la somme des limites inférieures.

Exercice 4 Calculer $\limsup(x_n)$ et $\liminf(x_n)$ pour les suites définies de la manière suivante :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-1)^n$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1/(n+1)$;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-1)^n\, n$;
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (n+1)^{(-1)^n}$;
5. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (2 + \cos(n\frac{\pi}{2}))\,\frac{n}{2n+1}$;
6. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{11n + 2\cos(n\pi)}{\sqrt{4n^2+n-1}}$.

Opérations sur les ensembles

Exercice 5 On travaille dans un ensemble X fixé. Pour toute partie A de X on note A^c le complémentaire de A dans X :
$$A^c = X\backslash A = \{x \in X \,;\ x \notin A\}.$$
Montrer les propriétés suivantes.

1. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de X, croissante au sens de l'inclusion c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, alors pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} A_n = \bigcup\limits_{n\geqslant n_0} A_n$.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de X, décroissante au sens de l'inclusion c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$, alors pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} A_n = \bigcap\limits_{n\geqslant n_0} A_n$.
3. Si A et B sont des parties de X, si $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ sont des familles de parties de X indexées par un ensemble *quelconque* d'indices I, alors
   (a) $A \cap \big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I}(A \cap B_i)$ et $A \cup \big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I}(A \cup B_i)$.
   (b) $\big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\big)^c = \bigcap\limits_{i\in I} A_i^c$ et $\big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\big)^c = \bigcup\limits_{i\in I} A_i^c$.
   (c) $A \setminus \big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I}(A \setminus B_i)$ et $\big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\big) \setminus B = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \setminus B)$.
   (d) $A \setminus \big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I}(A \setminus B_i)$ et $\big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\big) \setminus B = \bigcap\limits_{i\in I}(A_i \setminus B)$.

Fonctions

Exercice 6 Image directe, image réciproque. Soient deux ensembles X et Y, une fonction $f : X \to Y$ et des ensembles $A \subset X$ et $B \subset Y$. On rappelle que l'*image directe* de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x);\ x \in A\},$$

et si $B \subset Y$ l'*image réciproque* de B par f est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in X;\ f(x) \in B\}.$$

On considère aussi $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$, des familles de parties de X indexées par un ensemble *quelconque* d'indices I.

1. Montrer les relations suivantes concernant les images réciproques :
   (a) $f^{-1}\big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
   (b) $f^{-1}\big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
   (c) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.
   (d) Si de plus g est une application de Y vers un ensemble Z, alors $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\big(g^{-1}(B)\big)$.
2. Attention, si l'on essaie de remplacer f^{-1} par f dans les relations précédentes, elles deviennent fausses en général.
   (a) Montrer néanmoins que $f\big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$.
   (b) Montrer que $f\big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\big) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$ et donner un contre-exemple montrant que l'égalité n'est pas vraie en général.
   (c) Montrer par un ou plusieurs contre-exemples qu'aucune inclusion n'est vraie en général entre $f(A^c)$ et $f(A)^c$.

Exercice 7 Injectivité. Soient des ensembles X et Y et une fonction $f : X \to Y$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) la fonction f est injective ;

(b) pour toute partie A de X on $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$;

(c) pour tout $x \in X$ on a $f^{-1}\big(f(\{x\})\big) = \{x\}$.

Exercice 8 **Surjectivité.** Soient des ensembles X et Y et une fonction $f : X \to Y$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) la fonction f est surjective ;

(b) pour toute partie B de Y on a $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$;

(c) pour tout $y \in Y$ on a $f\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \{y\}$.

Exercice 9 Soient un ensemble X et A et B deux parties fixes de X. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

1. Pour chacune des relations qui suivent, trouver toutes les parties C de X qui la vérifient :

$$\text{(i)} \quad A \cup C \subset B \cup C\,; \qquad \text{(ii)} \quad A \cap C \subset B \cap C\,; \qquad \text{(iii)} \quad (A \cap C) \cup (B \cap C^c) = \varnothing.$$

2. On définit $f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $f(C) = (A \cap C, B \cap C)$ pour tout $C \in \mathcal{P}(X)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le couple (A, B) pour que f soit :
   (i) injective ;
   (ii) surjective ;
   (iii) bijective.

Fonctions caractéristiques

Exercice 10 Soient X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on définit sa *fonction indicatrice* (ou *fonction caractéristique*, ou *indicatrice*) $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ par :

$$\forall x \in X, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A\,; \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On note parfois $\mathbf{1}_A$ au lieu de χ_A.

1. Préciser ce que sont $\chi_\varnothing$ et χ_X. Pour $A \subset X$ fixé et $Y \subset \mathbb{R}$, calculer $\chi_A^{-1}(Y)$.
2. Exprimer à l'aide de χ_A et χ_B les fonctions suivantes :

$$\chi_{A^c}, \quad \chi_{A \cap B}, \quad \chi_{A \cup B}$$

   (dans le cas général et dans le cas où $A \cap B = \varnothing$), $\chi_{A \triangle B}$ (où $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$), ainsi que $\chi_{f^{-1}(A)}$ pour une fonction $f : W \to X$ quelconque.
3. L'application $A \mapsto \chi_A$ est-elle une bijection de $\mathcal{P}(X)$ dans $\{0, 1\}^X$?
4. Soit (A_n) une suite de parties de X et soit $A = \displaystyle\bigcup_n A_n$.
   (i) Montrer que si la suite (A_n) est croissante (c'est-à-dire si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n), alors la suite (χ_{A_n}) est croissante et converge simplement vers χ_A.
   (ii) Si les A_n sont deux à deux disjoints, montrer que $\chi_A = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{A_n}$.

Exercice 11 **Formule d'inclusion-exclusion.** Soit X un ensemble fini. On note $\#A$ le cardinal d'une partie A de X.

1. Constater que pour une partie A de X, on a $\#A = \sum_{x \in X} \chi_A(x)$.
2. À l'aide de l'exercice précédent, retrouver la formule reliant $\#(A \cup B)$, $\#(A \cap B)$, $\#A$ et $\#B$.
3. Soit n un entier naturel et soient $A_1, \dots, A_n$ des parties de X. Démontrer la formule :

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \#\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big).$$

   Indication : introduire et calculer la fonction indicatrice de $B = \big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big)^c$, puis $\sum_{x \in B} \chi_B(x)$.

Exercice 12 **Application à quelques dénombrements.** Soit X un ensemble fini.

1. Calculer $\sum_{A \subset X} \#A$. *Indication :* écrire $\#A = \sum_{x \in X} \chi_A(x)$ et permuter les deux sommes.
2. Calculer $\sum_{A,B \subset X} \#(A \cap B)$. *Indication :* écrire $\#(A \cap B) = \sum_{x \in X} \chi_{A \cap B}(x)$ et permuter les deux sommes.
3. Calculer le nombre de couples de parties (A, B) de X telles que $A \subset B$.
   Indication : On pourra établir une bijection entre l'ensemble de ces couples et l'ensemble des fonctions de X vers $\{0, 1, 2\}$.

Dénombrabilité

Exercice 13 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
2. L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
3. L'ensemble $\mathbb{R}$ est dénombrable.
4. L'ensemble $\mathbb{C}$ est dénombrable.
5. L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ est dénombrable.

On pourra s'appuyer sur la non-dénombrabilité de $[0, 1[$.

Exercice 14 Un nombre réel x est dit *algébrique* s'il existe un polynôme P non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(x) = 0$. Un nombre réel qui n'est pas algébrique est *transcendant*.

1. Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.
2. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.