Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3$^{\text{e}}$ année
Mesure et intégration — Année 2017-2018

Contrôle écrit n$^{\text{o}}$ 1

5 décembre 2017 – 1 h 30

L'énoncé comporte deux pages. Calculatrices, téléphones et documents interdits.
Un soin particulier devra être accordé à la rédaction, en privilégiant les mots par rapport aux symboles comme $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$: une réponse sans mot ne sera pas comptabilisée.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Définir ce qu'est une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour une telle fonction, définir son intégrale sur I.
2. Énoncer le théorème de convergence monotone.
3. Énoncer le théorème de convergence dominée.

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_n(x) \;=\; \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n (\cos x)\; \mathbb{1}_{[0,n]}(x)\,, \end{array}$$

où $\mathbb{1}_{[0,n]}$ désigne la fonction indicatrice du segment $[0, n]$.

1. Montrer que f_n est mesurable.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
3. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|f_n| \leqslant g$.
   Indication : on pourra utiliser l'inégalité $\ln(1 - t) \leqslant -t$ pour $t \in [0, 1[$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$I_n \;=\; \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \,\mathrm{d}x\,.$$
   Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite et calculer cette limite.

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f_n : &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_n(x) \;=\; (-1)^n\,(\ln x)\, x^{2n}\,. \end{array}$$

1. Justifier que f_n est intégrable et calculer
$$\int_{]0,1[} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
2. Montrer que la série
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{]0,1[} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$$
   converge.
3. Soit $x \in]0, 1[$. Justifier que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge et que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \;=\; \frac{\ln x}{1 + x^2}\,.$$
4. Justifier que la fonction $F : x \mapsto (\ln x)/(1 + x^2)$ est intégrable sur $]0, 1[$.
5. Déduire de ce qui précède une expression de $\int_{]0,1[} F(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide de la somme d'une série.

.../...

Exercice 4 Soit μ une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'elle admet une densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On rappelle que cela signifie que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable par rapport à μ on a

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

1. Justifier que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = 1$.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on considère la fonction $F_t : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{itx}$. Montrer que F_t est intégrable par rapport à μ.
3. Montrer que la fonction $G : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} F_t \, \mathrm{d}\mu$ est continue.
4. En supposant que φ est donnée par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^\infty$.