Chap. XIV : Convolution

Le produit de convolution est un outil très important en analyse, en particulier l'analyse de Fourier, et applications comme par exemple en traitement du signal et/ou d'images.

Il en existe des versions plus ou moins sophistiquées. On va se concentrer sur le produit de convolution de fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$.

1 Produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est mesurable (comme on l'a déjà vu) et

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\, dx\, dy = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|\, dz\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\, dy\right) < +\infty,$$ d'après

le théorème de Tonelli et l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, qui implique que $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|\, dz$, quelque soit $y \in \mathbb{R}^d$ (on peut aussi faire appel au théorème de changement de variables, la jacobienne de l'application $x \mapsto x-y$ étant partout égale à la matrice identité). Ceci implique que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\, dy < +\infty$. On peut donc définir presque partout la fonction $x \mapsto (f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, dy$.

En la prolongeant par zéro là où $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\, dy = +\infty$, on obtient une fonction intégrable et

$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ d'après l'inégalité écrite ci-dessus.

De plus, le changement de variables $y \mapsto x-y$ montre que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $(f*g)(x) = (g*f)(x)$. Et $*$ est bilinéaire d'après la linéarité de l'intégrale.

On peut ainsi résumer :

<u>Théorème</u> : Le produit de convolution $*$ est un opérateur bilinéaire continu sur $L^1(\mathbb{R}^d)$, symétrique, défini par :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d, \text{ si } f \text{ et } g \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

et l'on a $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1$.

On constate par ailleurs que si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a $|f(x-y)\,g(y)| \leq \|g\|_\infty |f(x-y)|$ pour presque tout y et pour tout x, donc la fonction $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\,g(y)|\, dy \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dy = \|f\|_1 \, \|g\|_\infty .$$

On peut donc encore définir $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\,dy$ et l'on a $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1 \, \|g\|_\infty$.

La question naturelle est de savoir si $*$ se généralise au produit de convolution d'une fonction de $\mathcal{L}^1$ et d'une fonction de $\mathcal{L}^p$ avec $p \in]1,+\infty[$.
Et la réponse est oui !

2 <u>Produit de convolution entre L^1 et L^p, $p \in [1,+\infty]$.</u>

<u>Théorème</u> : Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1,+\infty]$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable, et la fonction $f*g$ définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ par $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\,dy$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$. De plus, $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p$.

XIV

Démonstration : les cas $p=1$ et $p=\infty$ ont déjà été vus. Supposons donc $p \in]1,+\infty[$, et posons $q = \frac{p}{p-1}$, l'exposant conjugué de p $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ on a $|f(x-y)\,g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}\,|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|$.

Par hypothèse sur f, la fonction $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}$ appartient à $L^q(\mathbb{R}^d)$ (puisque $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et donc aussi $y \mapsto |f(x-y)|$), quel que soit $x \in \mathbb{R}^d$.

De plus, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$: ceci se montre comme pour la définition de $*$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, grâce au théorème de Tonelli ; en effet,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|\right)^p dy\right)dx = \|f\|_1\,\|g\|_p < +\infty,$$

donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\left(|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|\right)^p dy < +\infty$.

Par suite, d'après l'inégalité de Hölder, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction produit $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}\,|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$

et $$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}\,|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|\,dy \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Autrement dit, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\,g(y)|\,dy \le \|f\|_1^{\frac{1}{q}}\left(\left(|f| * |g|^p\right)(x)\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \text{ puisque } |g|^p \in L^1 \text{ et } f \in L^1.$$

Or d'après le théorème sur la convolution dans L^1,

on a $\left\| |f| * |g|^p \right\|_1 \le \|f\|_1\,\left\||g|^p\right\|_1 = \|f\|_1\,\|g\|_p^p$.

D'où $$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\,g(y)|\,dy\right)^p dx \le \underbrace{\|f\|_1^{\frac{p}{q}}\,\|f\|_1}_{\|f\|_1^p}\,\|g\|_p^p,$$

et donc $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1\,\|g\|_p$. ◼

Plus généralement, on montre que $*$ définit une application bilinéaire continue de $L^p \times L^q$ dans L^r avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$, $p, q, r \in [1,+\infty]$,

et $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ si $f \in L^p$ et $g \in L^q$.

Cas particulier : $r=\infty$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (c'est-à-dire que p et q sont conjugués).

③ Produit de convolution entre L^p et $L^{p'}$

Proposition : soit $p \in [1,+\infty]$ et q son exposant conjugué (souvent noté p') : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g$ est uniformément continue. Si de plus $p \in]1,+\infty[$ alors $(f*g)(x)$ tend vers zéro lorsque $\|x\| \to \infty$.

Démonstration :
- $f*g$ est définie partout, d'après l'inégalité de Hölder.
- l'uniforme continuité résulte aussi de l'inégalité de Hölder :

$$|(f*g)(x)-(f*g)(z)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)-f(z-y)|\,|g(y)|\,dy$$
$$\leq \|f(x-\cdot)-f(z-\cdot)\|_p \|g\|_q =$$
$$\|f-f(z-x+\cdot)\|_p \|g\|_q,$$

et du fait que $\|f-f(w+\cdot)\|_p$ tend vers zéro lorsque w tend vers zéro, si $p<+\infty$. Si $p=+\infty$, on peut faire le même calcul en échangeant les rôles de f et g.

- le fait que $f*g$ tende vers zéro à l'infini est vrai si f et g sont continues à support compact.

Car alors $f*g$ aussi continue (d'après ce qui précède) et à support compact, inclus dans la somme des supports de f et de g (si $x \notin K+K'$, $K=\operatorname{supp} f$, $K'=\operatorname{supp} g$ alors $f(x-y)g(y)=0$ quel que soit $y \in \mathbb{R}^d$, et donc $(f*g)(x)=0$).

• De façon générale, si $p \in]1,+\infty[$, $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, il existe des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^p)^{\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^q)^{\mathbb{N}}$ telles que $\|f_n - f\|_p \to 0$, $\|g_n - g\|_q \to 0$

Alors, d'après l'inégalité de Hölder, $\|f*g - f_n * g_n\|_\infty \leq \|(f-f_n)*g\|_\infty + \|f_n*(g-g_n)\|_\infty \leq \underbrace{\|f-f_n\|_p}_{\text{tend vers zéro}} \|g\|_q + \underbrace{\|f_n\|_p}_{\text{borné}} \underbrace{\|g-g_n\|_q}_{\text{tend vers zéro}}$,

donc $\|f*g - f_n*g_n\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$: il existe $N \in \mathbb{N}$; $\|f*g - f_N * g_N\|_\infty \leq \varepsilon$, et on sait que pour $\|x\| > \text{diam}(\text{supp}(f_N * g_N))$, $(f_N * g_N)(x) = 0$. Donc $|(f*g)(x)| \leq \|f_N * g_N\|_\infty \leq \varepsilon$ (on a ici utilisé la continuité de $f*g$ pour avoir $\sup|f*g| \leq \|f*g\|_\infty$) ▨

④ Régularisation par convolution

Définition : on appelle approximation de l'unité une famille de fonctions $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que pour tout $\varepsilon>0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, avec $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ intégrable d'intégrale égale à 1.

On remarque que, par construction et d'après le théorème de changement de variables linéaire, on a $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1$, quel que soit $\varepsilon > 0$.

Comme ρ_ε est intégrable, on a $\rho_\varepsilon * f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, quelle que soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

Proposition: si $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'unité, si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1,+\infty[$ alors $\|\rho_\varepsilon * f - f\|_p \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

Démonstration : on sait déjà que $\|\rho_\varepsilon * f\|_p \leq \|\rho_\varepsilon\|_1 \|f\|_p = \|f\|_p$.

De plus, comme $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)\,dy = 1$, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(\rho_\varepsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\rho_\varepsilon(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-\varepsilon z) - f(x))\rho(z)\,dz,$$

d'après le changement de variables $z = \frac{y}{\varepsilon}$.

Par suite, en écrivant $\rho = \rho^{1/p}\rho^{1/q}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$|(\rho_\varepsilon * f)(x) - f(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\varepsilon z) - f(x)|^p \rho(z)\,dz\right)^{1/p} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\,dz\right)^{1/q}}_{=1},$$

d'où

$$\|\rho_\varepsilon * f - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\varepsilon z) - f(x)|^p \rho(z)\,dz\right)dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|f(\cdot - \varepsilon z) - f\|_p^p \,\rho(z)\,dz.$$

Or $\|f(\cdot - \varepsilon z) - f\|_p \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, quel que soit $z \in \mathbb{R}^d$,

et $\|f(\cdot - \varepsilon z) - f\|_p^p \leq (2\|f\|_p)^p < +\infty$. Comme ρ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à l'intégrale ci-dessus, qui tend donc vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

$\boxtimes$

Il se trouve que les approximations de l'unité $\mathcal{C}^\infty$ à support compact jouent un rôle particulier.

Lemme : il existe $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx = 1$ et ρ soit à support dans la boule unité.

Démonstration : on montre par exemple que $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est $\mathcal{C}^\infty$, à support dans la boule unité par construction. On pose alors

$$\rho = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\,dx}.$$

$\boxtimes$

XIV

Corollaire : L'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, si $p \in [1, +\infty[$.

Démonstration : Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1,+\infty[$. Soit $\delta > 0$.

D'après un résultat du chapitre précédent, on sait qu'il existe g continue à support compact telle que $\|f-g\|_p \leq \frac{\delta}{2}$.

Soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'unité avec ρ_ε de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. On sait que $\rho_\varepsilon * g - g$ tend vers 0 dans L^p d'après la proposition précédente. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|\rho_\varepsilon * g - g\|_p \leq \frac{\delta}{2}$.

Donc $\|f - \rho_\varepsilon * g\|_p \leq \delta$.

Il reste à vérifier que $\rho_\varepsilon * g$ est $\mathcal{C}^\infty$, car on sait déjà qu'elle est à support compact.

La démonstration se fait bien sûr par récurrence sur l'ordre de dérivation.

Oublions pour simplifier l'écriture l'indice ε.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $(\rho * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x-y) g(y)\, dy = \int_{K_r} \rho(x-y) g(y)\, dy$,

avec $K_r = B_r - \operatorname{supp} \rho$, si $x \in B_r$, la boule de rayon r. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(x-y) g(y) \right) \right| = |\rho'(x-y)\, g(y)| \leq \max|\rho'|\, |g(y)| .$$

$< +\infty$ car ρ' est continue à support compact.

Comme $|g|$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ et en déduire que $\rho * g$ est dérivable, de dérivée :

$$(\rho * g)'(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho'(x-y) g(y)\, dy = (\rho' * g)(x).$$

Par une récurrence immédiate on en déduit que $\rho * g$ est $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(\rho * g)^{(j)} = \rho^{(j)} * g$. ∎