XI

Chap. XI : Intégrales à paramètre

Il s'agit dans ce chapitre de mettre en place les outils permettant d'étudier les fonctions définies par des intégrales.

Il y a en effet en analyse de nombreuses occasions de définir une fonction par une intégrale, qu'on appelle aussi intégrale à paramètre (le paramètre étant précisément la variable dont dépend la fonction considérée).

Par exemple, on peut considérer la fonction Γ : elle est définie (on en reparlera plus loin) pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, z > 0$ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$.

Des transformations en analyse fonctionnelle font également intervenir des intégrales à paramètre :

- transformation de Laplace : $(\mathcal{L}u)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t)\, dt$,
- " " Fourier : $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx$,
- convolution : $(u * v)(t) = \int_0^t u(t-s) v(s)\, ds$

ou $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y)\, dy$.

Bien sûr toutes ces transformations nécessitent des hypothèses sur les fonctions ainsi transformées. On en verra des exemples plus loin.

XI

① Passage à la limite sous le signe $\int$

Soit (Λ, d) un espace métrique. Si λ_* est adhérent à Λ, une fonction $F : \Lambda \to \mathbb{C}$ a une limite l en λ_* si et seulement si, pour toute suite $(\lambda_n) \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ tendant vers λ_*, $F(\lambda_n)$ tend vers l.

Une conséquence du théorème de convergence dominée permet de passer à la limite dans les intégrales à paramètre.

Théorème: Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré complet, (Λ, d) un espace métrique, λ_* adhérent à Λ, si $f : X \times \Lambda \to \mathbb{C}$ est telle que

i) pour tout λ au voisinage de λ_*, l'application partielle $x \mapsto f(x, \lambda)$ est μ-mesurable,

ii) pour μ-presque tout $x \in X$, l'application partielle $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ a une limite en λ_*,

iii) il existe $g : X \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que, au voisinage de λ_*, pour presque tout $x \in X$, $|f(x,\lambda)| \leq g(x)$,

alors la fonction
$$F : \Lambda \to \mathbb{C}, \quad \lambda \mapsto \int_X f(x, \lambda)\, d\mu(x)$$
est bien définie au voisinage de λ_* et a une limite en λ_* :
$$\lim_{\lambda \to \lambda_*} F(\lambda) = \int_X \lim_{\lambda \to \lambda_*} f(x, \lambda)\, d\mu(x).$$

Exemple d'application: Soit $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$. Pour tous $s \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}^+$, $|e^{-st} u(t)| \leq |u(t)|$, et $|u|$ est intégrable comme u.

Donc la fonction $\mathcal{L}u : s \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t)\, dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, pour presque tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $|u(t)| < +\infty$ et donc la fonction $s \mapsto e^{-st} u(t)$ tend vers 0 quand $s \to +\infty$, comme $s \mapsto e^{-st}$.

On en déduit que $\mathcal{L}u(s)$ tend vers zéro quand $s \to +\infty$.

② Continuité des fonctions définies par des intégrales.

Théorème : si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré complet et (Λ, d) un espace métrique, si $f : X \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ est telle que

i) pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application partielle $x \longmapsto f(x, \lambda)$ est μ-mesurable,

ii) pour presque tout $x \in X$, l'application partielle $\lambda \longmapsto f(x, \lambda)$ est continue,

iii) il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, pour p.p.t. $x \in X$, $|f(x, \lambda)| \leq g(x)$,

alors la fonction
$$F : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda \longmapsto \int_X f(x, \lambda)\, d\mu(x) \quad \text{est continue.}$$

Exemples d'application :

- si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, pour tous $\xi \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $|e^{-i\xi x} f(x)| \leq |f(x)|$ et $|f|$ est intégrable comme f. De plus, l'application $\xi \longmapsto e^{-i\xi x} f(x)$ est continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
  On en déduit que $\hat{f} : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, dx$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- si $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$, la fonction $\mathcal{L}u : s \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t)\, dt$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

- Montrons que la fonction $\Gamma : s \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{s-1}\, dt$ est continue sur $]0, +\infty[$. Pour ce faire, on va montrer qu'elle est continue sur tout segment $[s_0, s_1]$ avec $0 < s_0 < 1 < s_1 < +\infty$.

  Soient donc s_0 et s_1 tels que ______ .

  Si $t \geq 1$, $|e^{-t} t^{s-1}| = e^{-t}\, t^{s-1} \leq e^{-t}\, t^{s_1 - 1}$, et il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^{-x} x^{s_1 - 1} \leq C_1\, e^{-x/2}$, par exemple,

  si $t \in]0, 1[$, $e^{-t} t^{s-1} \leq t^{s_0 - 1}$, pour tout $s \in [s_0, s_1]$.

  Donc $e^{-t}\, t^{s-1} \leq C_1\, e^{-t/2}\, \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t) + t^{s_0 - 1}\, \mathbb{1}_{]0,1[}(t)$, qui est intégrable comme somme de deux fonctions intégrables, puisque $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Comme par ailleurs la fonction $s \mapsto e^{-t} t^{s-1}$ est continue sur $[s_0, s_1]$, quel que soit $t \in]0,+\infty[$, le théorème précédent s'applique et on en déduit que Γ est continue.

③ Dérivation sous le signe $\int$.

Théorème : si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré complet et I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, si $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ est telle que

i) pour tout $t \in I$, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable,

ii) pour presque tout $x \in X$, ———— $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable dans I,

iii) il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable telle que, pour tout $t \in I$, pour p.p.t $x \in X$,
$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x),$$

alors la fonction
$$F : I \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \int_X f(x,t)\, d\mu(x)$$
est dérivable et
$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Démonstration : d'après i), la fonction F est bien définie. Les trois choses à montrer sont que :

* F est dérivable,
* $\frac{\partial f}{\partial t}$ est mesurable, car alors elle sera intégrable d'après iii),
* $F' = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}\, d\mu(x)$.

Pour cela, fixons $t_0 \in I$ et montrons que pour toute suite $(h_n)_n$ tendant vers zéro telle que $t_0 + h_n \in I$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le taux d'accroissement $\frac{F(t_0+h_n) - F(t_0)}{h_n}$ a une limite finie indépendante de la suite (h_n), en l'occurrence égale à $\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\, d\mu(x)$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ étant mesurable.

XI

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite. Par linéarité de l'intégrale,

$$\frac{F(t_0+h_n)-F(t_0)}{h_n} = \int_X \frac{f(x,t_0+h_n)-f(x,t_0)}{h_n}\, d\mu(x).$$

Or, quel que soit $n\in\mathbb{N}$, la fonction $\varphi_n : x \mapsto \frac{f(x,t_0+h_n)-f(x,t_0)}{h_n}$ est mesurable comme somme de fonctions mesurables, d'après i).

D'après ii), $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ pour presque tout x. Donc $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ est mesurable (l'espace $(X,\mathcal{M},\mu)$ étant complet).

Et d'après iii) et le théorème des accroissements finis,

$$|\varphi_n(x)| \leq \sup_{t\in I}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x) \quad \text{pour presque tout } x\in X,$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée. On en déduit que la fonction $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ est intégrable et

$$\frac{F(t_0+h_n)-F(t_0)}{h_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\, d\mu(x).$$

$\boxtimes$

Exemples d'application :

- si $u\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$, la fonction $\mathcal{L}u : s\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-st}u(t)\,dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Montrons qu'on peut en effet appliquer le théorème précédent sur tout intervalle $]s_0,+\infty[$ avec $s_0>0$.

Comme on a déjà remarqué, pour tout $s\in\mathbb{R}^+$ $|e^{-st}u(t)|\leq |u(t)|$ et u est intégrable.

De plus, $\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = -t e^{-st}u(t)$, avec $f(t,s)=e^{-st}u(t)$,

et donc $\left|\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right| \leq t e^{-s_0 t}|u(t)|$ pour tout $s\in]s_0,+\infty[$.

La fonction $t\mapsto t e^{-s t_0}|u(t)|$ étant intégrable comme produit d'une fonction bornée et d'une fonction intégrable, on en déduit que $\mathcal{L}u$ est dérivable et $(\mathcal{L}u)'(s) = -\int_0^{+\infty} t e^{-st}u(t)\,dt$.

XI

- Montrons que la fonction Γ est dérivable sur tout intervalle $]s_0, s_1[$ avec $0 < s_0 < 1 < s_1 < +\infty$, et donc sur $]0, +\infty[$.

Soit $f(t,s) = e^{-t} t^{s-1}$. Pour $s > 0$ et $t > 0$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t,s) = (\ln t)\, e^{-t} t^{s-1}$.

Soit $\varepsilon \in]0, s_0[$: il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que $|\ln t| \leqslant C_\varepsilon t^{-\varepsilon} \mathbb{1}_{]0,1[}(t) + C_\varepsilon t^{\varepsilon} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$.

D'où $\left|\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right| \leqslant C_\varepsilon \left(e^{-t} t^{s_1+\varepsilon-1} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t) + t^{s_0-\varepsilon-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(t) \right)$ si $t > 0$ et $s \in]s_0, s_1[$

et la fonction de t au membre de droite est intégrable.

Donc Γ est dérivable sur $]s_0, s_1[$ et $\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} (\ln t)\, e^{-t} t^{s-1} \, dt$.

<u>Remarque:</u> attention, si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ n'est pas nécessairement dérivable. Par exemple pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on a $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$, dont la dérivée n'est pas définie en 0.