Chap. X : Applications de l'intégrale de Lebesgue

① Probabilités

Rappelons que si $(\Omega, \mathcal{E})$ est un espace mesurable, on appelle mesure de probabilité sur cet espace une mesure $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0,1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$ est appelée variable aléatoire.

Les variables aléatoires sont souvent notées X (à ne pas confondre avec l'ensemble de départ, ici noté Ω !).

Définition : si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, la mesure image de $\mathbb{P}$ par X est notée $\mathbb{P}_X$ et appelée loi de X.

Noter que $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, de sorte que $\mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

L'intégrale par rapport à une mesure de probabilité $\mathbb{P}$, $\int_\Omega F\, d\mathbb{P} = \int_\Omega F(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ est parfois notée $\int_\Omega F(\omega)\ \mathbb{P}(d\omega)$.

Le théorème de transfert permet notamment de calculer des espérances : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable, $f \circ X$ est une variable aléatoire et $\mathbb{E}(f\circ X) = \int_\Omega (f\circ X)(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} f(x)\, d\mathbb{P}_X(x)$.

Si $\mathbb{P}_X$ est une mesure à densité par rapport à λ, de densité φ, on a de plus

$$\int_\mathbb{R} f(x)\, d\mathbb{P}_X(x) = \int_\mathbb{R} f(x)\, \varphi(x)\, d\lambda(x).$$

Exemple : si X suit une loi normale centrée réduite, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

② Intégrales de Riemann

Théorème: Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ au sens de Lebesgue et $\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(t) \, dt$.

Démonstration : • si f est en escalier alors elle est étagée mesurable, et si $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ est une subdivision adaptée à f alors on peut écrire

$$f = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \mathbb{1}_{]x_i, x_{i+1}[} + \sum_{j=0}^{N} z_j \mathbb{1}_{\{x_j\}}.$$

Ainsi $\int_a^b |f(t)| dt = \sum_{i=0}^{N-1} |y_i|(x_{i+1} - x_i) = \int_{[a,b]} |f| \, d\lambda < +\infty$ puisque $\lambda(\{x_j\}) = 0$ et $\lambda(]x_i, x_{i+1}[) = x_{i+1} - x_i$,

et de même $\int_a^b f(t) \, dt = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$.

• De façon générale, il existe des suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f - f_n| \leq \varphi_n$ et $\int_a^b \varphi_n(t) \, dt \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, $\left| \int_a^b f_n(t) \, dt - \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b \varphi_n(t) \, dt \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b \varphi_n(t) \, dt \leq 2^{-n}$. Ceci assure que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b \varphi_n(t) \, dt < +\infty$.

Or pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on sait que $\int_a^b \varphi_n(t) \, dt = \int_{[a,b]} \varphi_n \, d\lambda$ et on peut donc appliquer le théorème d'interversion vu au chap. IX, de sorte que

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n \, d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b \varphi_n(t) \, dt < +\infty.$$ Ceci implique que $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n < +\infty$ presque partout.

D'où $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ presque partout, et donc $f_n \to f$ presque partout, puisque $|f_n - f| \leq \varphi_n$. Donc f est mesurable puisque les f_n le sont et la mesure de Lebesgue est complète.

De plus f est bornée, comme toute fonction intégrable au sens de Riemann sur un segment. Donc elle est intégrable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \int_a^b f_n(t)\,dt$ d'après la 1ère étape, et l'on sait que $\int_a^b f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ quand $n \to \infty$.

L'idée serait donc de passer à la limite dans le membre de gauche : si on montre que $\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda \longrightarrow \int_{[a,b]} f \, d\lambda$ alors on aura

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Le problème est d'avoir la domination. En fait on peut construire des suites de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f \leq g_n$, $\int_a^b (g_n - f_n)(t)\,dt \longrightarrow 0$ et il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $-M \leq f_n \leq g_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, en reprenant la même démonstration que précédemment avec $\varphi_n = g_n - f_n$, on a $|\varphi_n| \leq 2M$ et donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée : $\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda \to \int_{[a,b]} f \, d\lambda$.

Il reste à prouver l'affirmation précédente.

Soit $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $|f| \leq \frac{M}{2}$ (rappelons que f est bornée). On sait qu'il existe des fonctions en escalier f_n et g_n telles que $f_n \leq f \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int_a^b (g_n - f_n)(t)\,dt \longrightarrow 0$. Soit alors $X = \mathrm{id}\,\mathbb{1}_{[-M,M]} + M\,\mathbb{1}_{]M,+\infty[} - M\,\mathbb{1}_{]-\infty,-M[}$.

Montrons que les fonctions $\tilde{f}_n := X \circ f_n$ et $\tilde{g}_n = X \circ g_n$ remplissent nos critères. Elles sont en escalier (exo). Puisque X est croissante, $\tilde{f}_n \leq X \circ f = f \leq \tilde{g}_n$. De plus, comme $f_n \leq \frac{M}{2} < M$ et $g_n \geq -\frac{M}{2} > -M$, on a : $\int_a^b (\tilde{g}_n - \tilde{f}_n)(t)\,dt = \int_{[a,b]} (\tilde{g}_n - \tilde{f}_n)\,d\lambda =$

$$\int (g_n - f_n)\,d\lambda + \int (X\circ g_n - X \circ f_n)\,d\lambda \leq \int (g_n - f_n)\,d\lambda = \int_a^b (g_n - f_n)(t)\,dt. \quad \blacksquare$$

Ce résultat s'étend naturellement aux fonctions à valeurs complexes.

③ Intégrales de Riemann généralisées

<u>Théorème</u> : soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a, +\infty]$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$, intégrable au sens de Riemann sur tout segment inclus dans $[a, b[$. Alors f est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente. Si c'est le cas alors $\int_{[a,b[} f\,d\lambda = \int_a^b f(t)\,dt$.

<u>Démonstration</u> : Vérifions d'abord que f est mesurable : si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $[a, b[$ tendant vers $+\infty$, soit $f_n := f \times \mathbb{1}_{[a, x_n]}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Comme par hypothèse $f|_{[a, x_n]}$ est intégrable au sens de Riemann, elle est mesurable d'après le théorème vu au § 2, et f_n est donc aussi mesurable.
De plus f_n tend vers f sur $[a, b[$, donc f est mesurable.

En outre, la suite $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $|f|$.
Donc d'après le théorème de convergence monotone et le théorème du § 2,

$$\int_{[a,b[} |f|\,d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{[a,b[} |f_n|\,d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_a^{x_n} |f(t)|\,dt.$$

Donc f est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si $\lim_{n \to \infty} \int_a^{x_n} |f(t)|\,dt < +\infty$ (noter que cette limite existe toujours puisque la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc aussi la suite $\left(\int_a^{x_n} |f(t)|\,dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante).
Or l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente si et seulement

si $\int_a^x |f(t)|\,dt$ a une limite finie lorsque $x \nearrow b$, ce qui équivaut à demander que $\int_a^{x_n} |f(t)|\,dt$ ait une limite finie quelle que soit la suite croissante (x_n) tendant vers b.

Si c'est le cas, comme $|f_n| \leq f$ sur $[a,b[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée : $\int_{[a,b[} f_n\,d\lambda \longrightarrow \int_{[a,b[} f\,d\lambda$.

Comme par ailleurs on a $\int_{[a,b[} f_n\,d\lambda = \int_a^{x_n} f(t)\,dt$ d'après le théorème du §2 et $\int_a^{x_n} f(t)\,dt \to \int_a^b f(t)\,dt$ par définition de cette intégrale généralisée, on en déduit finalement $\int_{[a,b[} f\,d\lambda = \int_a^b f(t)\,dt$ ☒

④ Séries numériques

On vient de voir que les intégrales de Riemann (de fonctions d'une variable) peuvent être vues comme des intégrales de Lebesgue par rapport à la mesure de Lebesgue.

On va voir que les sommes de séries (numériques) peuvent être vues comme des intégrales de Lebesgue par rapport à la mesure de comptage.

<u>Théorème</u> : On munit $\mathbb{N}$ de la tribu discrète et de la mesure de comptage σ. Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si la série $\sum f(n)$ est absolument convergente. Si c'est le cas alors $\int_{\mathbb{N}} f\,d\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$.

<u>Remarques:</u> 1) Toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est mesurable, lorsque $\mathbb{N}$ est muni de la tribu discrète !

2) si $f : \mathbb{N} \to [0,+\infty]$ est intégrable, on doit avoir $\sigma(\{n \in \mathbb{N} ;\ f(n) = +\infty\}) = 0$ et donc $\{n \in \mathbb{N} ;\ f(n) = +\infty\} = \emptyset$.

…/…

Démonstration : • si $f : \mathbb{N} \to [0,+\infty[$ est étagée,

$$f = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j} \;,\; A_j = f^{-1}(\{y_j\}) \;,\; y_j \quad \text{distincts}$$

deux à deux, alors les A_j forment une partition de $\mathbb{N}$ (ils sont disjoints deux à deux et $\bigcup_{j=1}^{m} A_j = \mathbb{N}$) et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{n \in A_j} f(n)$.

Par définition, $\int_{\mathbb{N}} f \, d\sigma = \sum_{j=1}^{m} y_j \, \sigma(A_j)$. Comme $y_j = f(n)$ pour tout $n \in A_j$,

on a $\sum_{n \in A_j} f(n) = y_j \, \sigma(A_j)$. Donc $\int_{\mathbb{N}} f \, d\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$.

• Montrons que ce résultat est vrai pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

Lemme : pour toute série $\sum a_n$ de terme général $a_n \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{n \in A} a_n \;;\; A \text{ partie finie de } \mathbb{N} \right\}.$$

En effet, soit $S := \sup \left\{ \sum_{n \in A} a_n ;\; A \text{ partie finie de } \mathbb{N} \right\} \in [0,+\infty]$.

* si $S = +\infty$ alors pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe une partie finie A de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n \in A} a_n \geq M$, d'où $\sum_{n=0}^{\max A} a_n \geq M$. La suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas majorée et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty = S.$$

* si $S < +\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie A de $\mathbb{N}$ telle que $S - \varepsilon \leq \sum_{n \in A} a_n \leq S \, (+\varepsilon)$, d'où

$$S - \varepsilon \leq \sum_{n \in A} a_n \leq \sum_{n=0}^{N} a_n \leq S \quad \text{pour tout } N \geq \max A.$$

Ceci montre que $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = S$, ie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$. lemme ∎

Soit maintenant $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Montrons que

$$\sup \left\{ \sum_{n \in A} f(n) ;\; A \text{ partie finie de } \mathbb{N} \right\} = \int_{\mathbb{N}} f \, d\sigma.$$

X

On rappelle que, par définition, $\int_{\mathbb{N}} f\,d\sigma = \sup\left\{\int_{\mathbb{N}} \varphi\,d\sigma\ ;\ \varphi \leq f,\ \varphi \text{ étagée}\right\}$.

* si A est une partie finie de $\mathbb{N}$, soit $g = f\,\mathbb{1}_A$. Alors $g \leq f$ donc $\int_{\mathbb{N}} g\,d\sigma \leq \int_{\mathbb{N}} f\,d\sigma$. Mais en fait g est étagée (puisqu'elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs : $g(\mathbb{N}) = f(A)$). Donc $\int_{\mathbb{N}} g\,d\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) = \sum_{n\in A} f(n)$. Par suite $\sum_{n\in A} f(n) \leq \int_{\mathbb{N}} f\,d\sigma$.

Ceci étant vrai quelle que soit A, on en déduit que

$$\sup\left\{\sum_{n\in A} f(n)\ ;\ A \text{ partie finie de } \mathbb{N}\right\} \leq \int_{\mathbb{N}} f\,d\sigma.$$

* si $\varphi \leq f$ avec φ étagée, si A est une partie finie de $\mathbb{N}$,

$$\sum_{n\in A} \varphi(n) \leq \sum_{n\in A} f(n) \leq \sup\left\{\sum_{n\in A} f(n)\ ;\ A \text{ partie finie de } \mathbb{N}\right\}.$$

Ceci étant vrai quelle que soit A, on en déduit que

$$\sup\left\{\sum_{n\in A} \varphi(n)\ ;\ A \text{ partie finie de } \mathbb{N}\right\} \leq \sup\left\{\sum_{n\in A} f(n)\ ;\ A \text{ partie finie de } \mathbb{N}\right\}.$$

Or le membre de gauche est égal à $\int_{\mathbb{N}} \varphi\,d\sigma$ d'après la $1^{ère}$ étape.

L'inégalité étant vraie quelle que soit φ, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\sigma \leq \sup\left\{\sum_{n\in A} f(n)\ ;\ A \text{ partie finie de } \mathbb{N}\right\},$$

par définition de $\int_{\mathbb{N}} f\,d\sigma$.

• De façon générale, si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, on a $\int_{\mathbb{N}} |f|\,d\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} |f(n)|$ d'après l'étape précédente.

Elle est donc intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} |f(n)| < +\infty$.

Si c'est le cas, on obtient la formule

$\int_{\mathbb{N}} f\,d\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ en décomposant $f = u + iv$ avec u et v réelles, puis $u = u_+ - u_-$, $v = v_+ - v_-$ et en leur appliquant l'étape précédente.

▨