Chap. VIII : Intégrale de Riemann

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les définitions de base et montrer quelques limitations de l'intégration au sens de Riemann.

Pour simplifier, on ne considère que des fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles.

① Fonctions en escalier

L'intégration au sens de Riemann sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $a<b$) repose sur la notion de fonction en escalier.

<u>Définition</u> : Une **subdivision** du segment $[a,b]$ est une famille finie de points $x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$ de $[a,b]$. Son **pas** est $h = \min\limits_{i \in [\![0,N-1]\!]} (x_{i+1} - x_i)$.
Une fonction f est dite **en escalier** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0,N]\!]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0,N-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ soit constante.
La subdivision en question est alors dite **adaptée** à la fonction f.

Il existe bien sûr plusieurs (et même une infinité) de subdivisions adaptées à une fonction en escalier (il suffit de couper en deux, par exemple, chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ pour obtenir une subdivision de pas deux fois plus petit).

<u>Définition</u> : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier.
Alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ est le nombre réel défini par

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)\, c_i \,,$$

où $(x_i)_{i\in[\![0,N]\!]}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et c_i est la valeur de $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$.

On vérifie en effet facilement que la somme ne dépend pas pas de la subdivision choisie. Elle représente l'aire « signée » de la réunion des rectangles situés entre la courbe de la fonction (en fait une succession de segments dans le plan) et l'axe des abscisses, les rectangles sous l'axe contribuant avec un signe moins.

② Fonctions intégrables au sens de Riemann

Définition: Pour des réels a, b avec $a<b$, une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann si : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b (\psi(t) - \varphi(t))\,dt \leq \varepsilon$.

On remarque qu'une fonction intégrable au sens de Riemann est nécessairement bornée, car les fonctions en escalier le sont.

On montre que toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann.

Plus généralement, toute fonction réglée sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann.

Une fonction réglée sur $[a,b]$ est par définition une limite uniforme de fonctions en escalier. On montre que ceci équivaut à ce qu'elle ait une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $]a,b[$, ainsi qu'une limite à droite en a et une limite à gauche en b.

En particulier, toute fonction monotone sur $[a,b]$ est réglée donc intégrable au sens de Riemann.

Exemple de fonction Riemann-intégrable mais pas réglée : $x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, on montre que

$\sup\left\{ \int_a^b \varphi(t)\,dt \;;\; \varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ en escalier, } \varphi \leq f \right\} =$

$\inf\left\{ \int_a^b \psi(t)\,dt \;;\; \psi : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ ——— }, f \leq \psi \right\}$, et on

définit $\int_a^b f(t)\,dt$ comme étant ce nombre.

③ Propriétés de l'intégrale de Riemann. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

l'ensemble $\mathcal{R}$ des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ intégrables au sens de Riemann est un espace vectoriel et l'application

$$\begin{aligned} I : \mathcal{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto I(f) := \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$ est linéaire

($I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$ quels que soient $f, g \in \mathcal{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$),

et positive, c'est-à-dire que si $f \geq 0$ alors $I(f) \geq 0$.

On a de plus, pour tout $f \in \mathcal{R}$, $(b-a) \inf\limits_{[a,b]} f \leq I(f) \leq (b-a) \sup\limits_{[a,b]} f$.

Théorème : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $(x_i)_{i \in [\![0,N]\!]}$ de $[a,b]$ de pas $h \leq \eta$ on ait

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) f(y_i) \right| \leq \varepsilon$$ si $y_i \in [x_i ; x_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \inf_{[x_i ; x_{i+1}]} f \right| \leq \varepsilon,$$

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \sup_{[x_i ; x_{i+1}]} f \right| \leq \varepsilon.$$

On appelle somme de Riemann $\sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1}-x_i)\, f(y_i)$ si $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$, somme de Darboux lorsque $f(y_i)$ est remplacé par $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f$ ou $\sup_{[x_i,x_{i+1}]} f$.

④ Limitations de l'intégrale de Riemann.

a) Elle s'applique à des fonctions nécessairement bornées.

Par exemple, la fonction
$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0, \end{cases}$$
n'est pas intégrable au sens de Riemann. On peut définir $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ mais c'est alors une intégrale généralisée, égale à $\lim_{\eta \searrow 0} \int_\eta^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

b) Elle s'applique à l'intégration sur des segments. Pour intégrer sur des intervalles non bornés il faut faire appel à une notion d'intégrale généralisée. Par exemple, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx$.

c) Des fonctions « simples » ne sont pas intégrables au sens de Riemann. Par exemple, la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$ sur $[0,1]$ n'est pas intégrable au sens de Riemann, car si φ et ψ sont des fonctions en escalier sur $[0,1]$ telles que $\varphi \le \chi_{\mathbb{Q}} \le \psi$ alors nécessairement $\varphi \equiv 0$ et $\psi \equiv 1$, d'où $\int_0^1 (\psi(t)-\varphi(t))\,dt = 1$.

d) Les passages à la limite sous le signe d'intégration sont délicats.

- la limite simple d'une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann ne l'est pas nécessairement.
- il en va de même avec les fonctions réglées ; plus précisément, le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions réglées est difficile à démontrer et nécessite comme hypothèse le fait que la limite soit une fonction réglée.

On verra qu'avec l'intégrale de Lebesgue, le théorème de convergence dominée se démontre plus facilement et que l'intégrabilité de la limite fait partie de la conclusion.

e) Le lien entre intégrale de Riemann et primitives peut réserver des mauvaises surprises.

- si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable, sa dérivée n'est pas nécessairement intégrable au sens de Riemann (elle l'est si F est ce qu'on appelle absolument continue) et on ne peut donc pas écrire $F(b) - F(a)$ comme l'intégrale de F'.
- si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, la fonction
$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$
n'est pas nécessairement dérivable.

Avec l'intégrale de Lebesgue, on pourra montrer que F est dérivable aux « points de Lebesgue ».