VI

Chap. VI - Fonctions mesurables

On peut faire un tableau de correspondance entre les notions de théorie de la mesure et de topologie.

Tribu $\mathcal{M}$ sur X —— $\mathcal{N}$ — Y	Topologie $\mathcal{T}$ sur X —— $\mathcal{U}$ sur Y
Espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ —— $(Y, \mathcal{N})$	Espace topologique $(X, \mathcal{T})$ —— $(Y, \mathcal{U})$
Ensembles mesurables de X —— Y	Ouverts de X —— Y
Fonctions mesurables $X \to Y$	Fonctions continues de X dans Y

1) Définitions de base

Définition 1 : Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ des espaces mesurables. Une fonction $f : X \to Y$ est **mesurable** si pour tout $B \in \mathcal{N}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.

Rappel : si $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{U})$ sont des espaces topologiques, $f : X \to Y$ est **continue** si pour tout $V \in \mathcal{U}$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Exemple : Une **fonction indicatrice** $\mathbb{1}_A$ n'est pas continue si $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$ (de sorte que $\mathbb{1}_A$ prend bien les deux valeurs 0 et 1) mais elle est mesurable si et seulement si l'ensemble A est mesurable.

Plus précisément, $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$, avec $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, est mesurable ssi A est mesurable dans X, c'est-à-dire $A \in \mathcal{M}$, si X est muni de la tribu $\mathcal{M}$.

En effet, $A = \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\})$ et $\{1\}$ est fermé donc dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc $\mathbb{1}_A$ mesurable implique que A est mesurable.

VI

Inversement, si A est mesurable, on montre que $\mathbb{1}_A$ est une fonction mesurable. Car pour toute partie B de $\mathbb{R}$ (pas seulement les boréliennes, en fait)

$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \emptyset$ si $0 \notin B$ et $1 \notin B$,

ou ___ $= A$ si $0 \notin B$ et $1 \in B$,

ou ___ $= X \setminus A$ si $0 \in B$ et $1 \notin B$,

ou ___ $= X$ si $0 \in B$ et $1 \in B$.

Par suite, $\mathbb{1}_A^{-1}(B)$ est mesurable, puisque $\emptyset$ et X le sont par définition, A l'est par hypothèse, ce qui implique que $X \setminus A$ l'est aussi. ∎

Définition 2 : Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{U})$ des espaces topologiques. Une fonction $f : X \to Y$ est dite borélienne si elle est mesurable lorsque X et Y sont munis de leurs tribus boréliennes respectives.

On peut caractériser assez facilement les fonctions boréliennes.

Proposition : Une fonction $f : X \to Y$ est borélienne si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un borélien de X.

Autrement dit, si X et Y sont munis des topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ respectivement, $f : X \to Y$ est borélienne ssi pour tout $V \in \mathcal{U}$, $f^{-1}(V) \in \sigma(\mathcal{T})$, la tribu engendrée par $\mathcal{T}$.

On démontrera ce résultat au prochain paragraphe. En attendant, il a une conséquence très importante.

Corollaire : Toute fonction continue est borélienne.

② Tribu image par une fonction.

Proposition : Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, Y un ensemble et $f : X \to Y$ une fonction. Alors $\mathcal{N} := \{ B \in \mathcal{P}(Y) ; f^{-1}(B) \in \mathcal{M} \}$ est une tribu sur Y.

Elle est appelée tribu image de $\mathcal{M}$ par f.

Démonstration : • $f^{-1}(Y) = X$, donc $Y \in \mathcal{N}$.

• si $B \in \mathcal{N}$, alors $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ puisque $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ est une tribu. Donc $Y \setminus B \in \mathcal{N}$. Donc en particulier $\emptyset \in \mathcal{N}$, puisque $Y \in \mathcal{N}$.

• si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{N}$, alors $f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{M}$ pour la même raison. Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{N}$. ▨

Corollaire : Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ des espaces mesurables. On suppose que $\mathcal{N}$ est la tribu engendrée par un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(Y)$. Alors une fonction $f : X \to Y$ est mesurable si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.

Démonstration : Notons $\widetilde{\mathcal{N}}$ la tribu image de $\mathcal{M}$ par f. Si l'on a que pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, cela signifie que $\mathcal{B} \subset \widetilde{\mathcal{N}}$. Donc la tribu engendrée par $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $\mathcal{N}$, est aussi incluse dans $\widetilde{\mathcal{N}}$. Ceci montre que pour tout $B \in \mathcal{N}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$. Par ailleurs la réciproque est immédiate : si f est mesurable, alors pour tout $B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{N}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$. ▨

En appliquant ce corollaire à $\mathcal{N}$ la tribu borélienne, engendrée par la topologie $\mathcal{U}$ sur Y, on en déduit la proposition énoncée au paragraphe précédent.

Remarque : la tribu image de $\mathcal{M}$ par f est, par construction, la plus grande tribu sur Y rendant f mesurable.

③ Tribu engendrée par une fonction.

<u>Proposition</u> : Soient X un ensemble, $(Y, \mathcal{N})$ un espace mesurable, $f : X \to Y$ une fonction. Alors $\mathcal{M} := \{ A = f^{-1}(B) ;\ B \in \mathcal{N} \}$ est une tribu.

Elle est appelée tribu engendrée par f (à partir de $\mathcal{N}$). C'est par construction la plus petite tribu sur X rendant f mesurable.

<u>Démonstration</u> : • $X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{M}$

• si $A = f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, alors $X \setminus A = f^{-1}(Y \setminus B) \in \mathcal{M}$ puisque $Y \setminus B \in \mathcal{N}$.
($B \in \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}$ est une tribu)

• si $A_n = f^{-1}(B_n) \in \mathcal{M}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \in \mathcal{M}$ puisque $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{N}$ ($B_n \in \mathcal{N}$ pour tout n et $\mathcal{N}$ est une tribu) $\blacksquare$

④ Tribu produit

Etant donnés deux espaces mesurables $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$, on aimerait définir une tribu sur le produit cartésien $X \times Y$.

<u>Définition</u> : on appelle rectangle mesurable dans $X \times Y$ tout ensemble de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$.

Attention, l'ensemble des rectangles mesurables n'est pas une tribu.

Par exemple avec $X = Y = \mathbb{R}$, $[0,1]^2 \cup [1,2]^2$ n'est pas un rectangle.

<u>Définition</u> : on appelle tribu produit sur $X \times Y$ et on note $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ la tribu engendrée par les rectangles mesurables.

<u>Proposition</u> : La tribu produit sur $X \times Y$ est la plus petite tribu qui rende les projections canoniques
$$X \times Y \to X \qquad \text{et} \qquad X \times Y \to Y$$
$$(x,y) \mapsto x \qquad\qquad (x,y) \mapsto y$$
mesurables.

Démonstration : • Telle que définie plus haut, la tribu produit rend effectivement continues les fonctions $P : X \times Y \to X$, $(x,y) \mapsto x$ et $Q : X \times Y \to Y$, $(x,y) \mapsto y$,

car pour tout $A \in \mathcal{M}$ et pour tout $B \in \mathcal{N}$, $P^{-1}(A) = A \times Y$ et $Q^{-1}(B) = X \times B$ sont des rectangles mesurables et appartiennent donc à la tribu produit sur $X \times Y$.

• Si $\mathcal{T}$ est une tribu sur $X \times Y$ rendant P et Q mesurables, elle contient $A \times Y = P^{-1}(A)$ et $X \times B = Q^{-1}(B)$ quels que soient $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$. Or $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$. Donc $A \times B$ appartient aussi à $\mathcal{T}$, quels que soient $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$. Donc $\mathcal{T}$ contient tous les rectangles mesurables et par conséquent la tribu qu'ils engendrent.

∎

Par récurrence, on étend la définition de tribu produit à tout produit cartésien d'un nombre fini d'espaces mesurables.

⑤ Produit de tribus boréliennes

Sur $\mathbb{R}^d$ par exemple, on a deux manières naturelles de définir une tribu liée à la topologie de $\mathbb{R}^d$ comme espace vectoriel normé :

- la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$,
- la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$.

Quel est le rapport entre les deux ? Un élément de réponse est le suivant.

Proposition : Si X et Y sont deux espaces topologiques [on ne donne pas de notation pour leurs topologies car on n'en aura pas besoin ici], alors

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y),$$

où $X \times Y$ est muni de la topologie produit.

Par définition, la topologie produit sur $X \times Y$ est la topologie la moins fine, c'est-à-dire avec le moins d'ouverts possible, qui rende continues les projections canoniques.

VI

Du coup la proposition se démontre facilement :

les projections canoniques $\begin{array}{l} X\times Y \longrightarrow X \\ (x,y) \longmapsto x \end{array}$ et $\begin{array}{l} X\times Y \longrightarrow Y \\ (x,y) \longmapsto y \end{array}$ sont continues

donc boréliennes, c'est-à-dire mesurables de $(X\times Y, \mathcal{B}(X\times Y))$ dans X et dans Y respectivement. Donc d'après la proposition du §④, $\mathcal{B}(X\times Y)$ contient la tribu produit $\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y)$. ▣

Mais attention, ces deux tribus ne sont pas forcément égales en général. Elles le sont lorsque X et Y sont deux espaces métriques séparables.

Rappel de topologie : dans un espace métrique séparable, il existe une famille dénombrable d'ouverts telle que tout ouvert soit une réunion d'ouverts de cette famille ; de plus, si X et Y sont tous deux des espaces métriques séparables, il existe une famille dénombrable $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de X et et une famille dénombrable $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de Y telles que tout ouvert de $X\times Y$ s'écrive $\bigcup_{n\in N}(U_n\times V_n)$, avec N une partie de $\mathbb{N}$.

Proposition : si X et Y sont deux espaces métriques séparables, alors $\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X\times Y)$.

Démonstration : • on a déjà vu que $\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X\times Y)$.

• si O est un ouvert de $X\times Y$, il existe une partie N de $\mathbb{N}$ telle que $O = \bigcup_{n\in N}(U_n\times V_n)$. Or $U_n\times V_n$ est un rectangle mesurable quel que soit $n\in\mathbb{N}$. Donc O appartient à la tribu produit $\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y)$. Et donc la tribu engendrée par les ouverts de $X\times Y$ est incluse dans la tribu produit $\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y)$. ▣

En particulier, comme $\mathbb{R}$ est séparable, $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

⑥ Opérations sur les fonctions mesurables

a) Composition

Proposition : soient $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$, $(Z, \mathcal{T})$ des espaces mesurables. Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont mesurables alors $g \circ f : X \to Z$ aussi.

Démonstration : il suffit de remarquer que pour tout $B \subset Z$, $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. Si de plus B est mesurable ($B \in \mathcal{T}$) alors $g^{-1}(B)$ aussi ($g^{-1}(B) \in \mathcal{N}$) et $f^{-1}(g^{-1}(B))$ de même ($\in \mathcal{M}$). ☒

b) Fonctions à valeurs réelles

Proposition : soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $(Y, \mathcal{T})$ un espace topologique. Si $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ sont mesurables et $\Phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ est continue, alors

$$h : X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto \Phi(f(x), g(x))$$

est mesurable.

Remarque : quand on ne précise pas, $\mathbb{R}^d$ est muni de sa tribu borélienne.

Démonstration : Φ est mesurable puisque continue, et

$$F : X \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \longmapsto (f(x), g(x))$$

est mesurable car il suffit de vérifier que $F^{-1}(I \times J) = f^{-1}(I) \cap g^{-1}(J) \in \mathcal{M}$ pour tous I, J ouverts de $\mathbb{R}$ pour en déduire que F est mesurable.

Donc $h = \Phi \circ F$ est mesurable. ☒

Corollaire : si $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ sont mesurables alors $f+g$, fg, $\min(f,g)$, $\max(f,g)$ sont mesurables. En particulier, $f_+ := \max(f, 0)$ et $f_- := \max(-f, 0)$, $|f| = f_+ + f_-$ sont mesurables. Si f ne s'annule pas, alors $\frac{1}{f}$ est mesurable.

Démonstration : il suffit d'appliquer la proposition avec $\Phi : (u,v) \mapsto u+v$, ou $(u,v) \mapsto uv$, ou $(u,v) = \min(u,v) = \frac{u+v-|v-u|}{2}$, ou $(u,v) \mapsto \max(u,v) = \frac{u+v+|v-u|}{2}$.

Et pour $\frac{1}{f}$, la proposition du a) avec $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1}{y}$, qui est continue donc mesurable. (oui, g est continue) ∎

c) Fonctions à valeurs complexes

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ muni de sa tribu borélienne.

Proposition : Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{C}$.

- Alors f est mesurable si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ le sont.
- Si $g : X \to \mathbb{C}$ est mesurable et f aussi, alors $f+g$ et fg le sont.
- Si $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable alors $|f|$ aussi et il existe $\alpha : X \to \mathbb{U}$, le cercle unité telle que $f = \alpha |f|$ et α mesurable (comme fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$).

Démonstration : • $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont les composées de f avec les projections canoniques. Si f est mesurable elles le sont donc aussi. Inversement, si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont mesurables alors $f = \mathrm{Re} f + i \,\mathrm{Im} f$ aussi, comme somme de fonctions mesurables.

- La somme de fonctions mesurables est en effet mesurable par composition de $(u,v) \mapsto u+v$ avec $x \mapsto (f(x), g(x))$.
- De même pour le produit, avec $(u,v) \mapsto uv$.
- Si f est mesurable alors $|f|$ aussi par composition avec $(u,v) \mapsto \sqrt{u^2+v^2}$,

qui est continue donc mesurable.

De plus $A := f^{-1}(\{0\})$ est mesurable. Si on pose $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ \frac{f(x)}{|f(x)|} & \text{si } x \notin A, \end{cases}$

on a $\alpha = \mathbb{1}_A + (\varphi \circ \tilde{f}) \mathbb{1}_{A^c}$, $\tilde{f} : X \setminus A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x \mapsto f(x)$ et $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z/|z|$.

Or φ est continue donc mesurable.

Et $\tilde{f}$ est mesurable comme f, car pour tout ouvert U de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\tilde{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ est mesurable et inclus dans $X \setminus A$.

Donc α est mesurable. ▣

d) Fonctions à valeurs dans un produit

Proposition : Soient $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ et $(Z, \mathcal{T})$ des espaces mesurables. Soit
$$F : X \longrightarrow Y \times Z$$
$$x \longmapsto (f(x), g(x)).$$
Alors F est mesurable si et seulement si f et g le sont.

Démonstration : c'est comme pour le cas $Y = Z = \mathbb{R}$ vu au § b), si f et g sont mesurables, quels que soient $A \in \mathcal{N}$, $B \in \mathcal{T}$, $F^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) \in \mathcal{M}$. Donc F est mesurable.
Réciproquement, si F est mesurable alors f et g le sont par composition avec les projections canoniques. ▣

e) Fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

On peut munir $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ de la topologie engendrée par les intervalles $[-\infty, a[$, $]a, b[$, $]b, +\infty]$ pour a et $b \in \mathbb{R}$.
(Ainsi, $\overline{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $[-1,1]$ par l'application
$$\overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1,1]$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arctan x, & x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{si } x = +\infty, \\ -1 & \text{si } x = -\infty. \end{cases}$$
)

On montre alors que la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée, au choix par :

- les intervalles de la forme $]a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$,
- ———— $[a, +\infty]$, ————,
- ———— $[-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$,
- ———— $[-\infty, b[$, ————.

Voici des résultats très importants concernant les suites de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\sup(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\inf(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\limsup(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\liminf(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mesurables.

Remarque: Les bornes supérieures et inférieures de parties de $\overline{\mathbb{R}}$ sont définies de façon assez intuitive (cf fiche de TD n° 1), et généralisent les bornes supérieures et inférieures des parties de $\mathbb{R}$.

Démonstration: Commençons par $g := \sup(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $b\in\mathbb{R}$,

$$g^{-1}([-\infty,b]) = \{x\in X;\ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leqslant b\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty,b])$$

(exercice: prouver cette égalité)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n^{-1}([-\infty,b])$ est mesurable puisque l'ensemble $[-\infty,b]$ et la fonction f_n sont mesurables. Donc $g^{-1}([-\infty,b])$ est mesurable, comme intersection dénombrable d'ensembles mesurables.

Donc g est mesurable. Donc $\inf(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = -\sup(-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi (en utilisant que l'opposé d'une fonction mesurable l'est aussi).

Par suite, $\limsup(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} f_k$ est mesurable (en appliquant les deux premiers résultats), de même que $\liminf(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} f_k$. ∎

Corollaire: si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite f et si les f_n sont mesurables alors f aussi.

On applique en effet la proposition avec $f = \limsup(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \liminf(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention : noter que ce résultat est faux si l'on remplace "mesurable" par "continue".